

初等几何的著名问题

Famous Problems of Elementary Geometry

■ Felix Klein

■ 沈一兵 译

高等教育出版社
Higher Education Press



初等几何的著名问题

Famous Problems of Elementary Geometry

■ Felix Klein

■ 沈一兵 译

高等教育出版社
Higher Education Press

International Press

图书在版编目（CIP）数据

初等几何的著名问题/（德）克莱因（Klein,F.）；沈一兵译. —北京：高等教育出版社，2005.7

（数学翻译丛书/丘成桐主编）

书名原文：Famous Problems of Elementary Geometry

ISBN 7-04-017389-1

Ⅰ.初… Ⅱ.①克… ②沈… Ⅲ.初等几何-数学问题 Ⅳ.0123

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 061235 号

策划编辑 张小萍 **责任编辑** 赵天夫 **封面设计** 王凌波
责任绘图 尹文军 **责任印制** 韩 刚

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司	**网上订购**	http://www.landraco.com
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		http://www.landraco.com.cn
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2005年7月第1版
印　　张	6.25	**印　　次**	2005年7月第1次印刷
字　　数	85 000	**定　　价**	15.00元

物料号　17389-00

《数学翻译丛书》序

改革开放以后，国内大学逐渐与国外的大学增加交流．无论到国外留学或邀请外地学者到中国访问的学者每年都有增长，对中国的科学现代化都大有帮助．但是在翻译外国文献方面的工作尚不能算多．基本上所有中国的教科书都还是由本国教授撰写，有些已经比较陈旧，追不上时代了．很多国家，例如俄罗斯、日本等，都大量翻译外文书本来增长本国国民的阅读内容，对数学的研究都大有裨益．高等教育出版社和海外的国际出版社有见及此，开始计划做有系统的翻译，由王元院士领导，北京的晨兴数学中心和杭州的浙江大学数学科学研究中心共同组织数学教授进行这个工作．参与的教授很多，有杨乐院士，刘克峰教授等等．我们希望这套翻译书能够使我们的大学生有更多的角度来看数学，丰富他们的知识．海外的出版公司如美国数学学会等多有帮助，我们谨此鸣谢．

丘成桐 (Shing-Tung Yau)

2005 年 1 月

前 言

由现代数学发展起来的更精确定义和更严格证明方法，在中学教师看来，既深奥难懂又极其抽象，因而只对少数专家来说有意义．为了应对这种倾向，我很高兴从去年夏天开始，在一系列讲座中，向比以往更多的听众讲解了现代科学如何看待初等几何作图的可能性．前不久，我有机会在Göttingen的复活节假日课程中介绍了这些讲座的梗概．听众似乎很感兴趣，夏季学期的经历也证实了这一点．恰好数学教学与自然科学促进协会在Göttingen开会，所以我斗胆在会上做了关于我讲座的一个简要说明．这个说明是由欧洲数学会的O. Tägert准备的，他参加了刚才提到的那次假日课程．他手中还有几个夏季学期的学生在我指导下写的讲座笔记．我希望这本拙作能为推动该协会的有益工作而做些贡献．

F. KLEIN

Göttingen, 1895年复活节

英译者前言

在德国数学教学与自然科学促进协会的Göttingen会议上，F. Klein教授用现代科学研究的观点，讨论了著名的古代三大几何问题 (倍立方，三等分角，圆的求积).

此举是为了将大学数学研究与中学数学教学更紧密地结合起来. Klein教授在这方面很可能取得了成功，因为该协会对他的讲座给予好评，各教育刊物一致推荐，其法译本和意大利译本也已问世.

本书对问题的论述简明易懂，读者甚至不需要微积分知识. 本书解答了如下的问题：在什么情况下几何作图是可能的？用什么手段可实现几何作图？什么是超越数？如何证明 e 和 π 是超越数？

由于相信这样一本重要著作的英译本能吸引许多无法阅读原著的读者，出版社关于进行翻译的要求很快得到了Klein教授的首肯.

笔者在准备阶段参考了Algiers的J. Griess教授的法译本，遵循了其中的合理修改.

笔者还感谢Ziwet教授对译文的润色及校样.

W. W. BEMAN

D. E. SMITH

1897年8月

编者前言

Klein 的小书在 35 年前出版后的三年内，已被翻译成英文、法文、意大利文和俄文[1]. 在美国，它满足了多年来的强烈需求，不少教师对这本著作的脱销感到遗憾. 没有一本著作能像它一样，以如此简练的形式提供完备的信息. 所以，应广大读者要求，我们纠正第一版中的某些笔误，添加注释以丰富内容，再次刊出新版.

此版中的修正以及注解，基本上与我在 1914 年《美国数学月刊》上发表的文章中所修订的摘录相同[2]. 在此感谢编辑允许再次发表这些材料.

R. C. ARCHIBALD

1930 年 2 月

[1]法文版： Griess, 1896, Paris, Nony; 意大利文版： Giudice, 1896, Turin, Rosenberg e Sallier；俄文版： Parfentiev, Sintsov, 1898, Kazan . 最后这个俄文版似乎没有让 Klein 论文集的编辑部知道（见 Vol.3, 1923, p.28).

[2]Remarks on Klein's "Famous Problems of Elementary Geometry", Vol.21, 247~259.

郑重声明

目 录

引 言

本教程起因于我想让大学的数学研究更紧密地联系中学的需要．尽管如此，这并不是针对初学者的，因为讨论的东西是用比中学更高的观点来处理的．另一方面，我们假定读者做了一点准备，并具有数学分析的初步知识，例如，指数函数的幂级数展开．

我们打算论述一些几何作图问题，并且我们的目标不是去寻求每个问题的适定解，而更多地是要确定求解的可能或不可能性．

下面三个问题是古代研究较多的对象，将有着特别的重要性．它们是：

1. 倍立方问题(也称为Delian问题)；

2. 任意角的三等分；

3. 圆的求积，即 π 的作图．

在所有这些问题中，古人试图用直尺和圆规来求解，结果却是徒劳一场．这些问题之所以著名，主要是由于它们的求解似乎需要运用更高等的工具．事实上，我们将要证明这种尺规求解是不可能的．

尺规求解第三个问题的不可能性最近才被证明．而第一和第二个问题的不可能性的证明则隐含在当今高等代数论文中发表的 Galois 理论中．另一方面，除了 Petersen 的教材，我们还没有找到其他的初等形式的清晰证明，这个教材在其他方面也值得借鉴．

首先，我们必须强调实际作图和理论作图的区别．例如，如果我们需要一个圆度盘作为测量工具，那么我们只要简单地去试制它．在理论上，早期人们认为一个圆能够(即用直尺和圆规)被分成若干等

份，份数只是 2^n 、 3 、 5 以及它们的乘积．后来 Gauss 增加了其他情形，他证明了当 p 为形如 $p=2^{2^\mu}+1$ 的素数时将圆 p 等分的可能性，以及对所有其他数的不可能性．这些结果并没有实际的优越性；Gauss的进展的意义是纯理论的．本教程的所有讨论，其意义亦然．

我们的基本问题也许可以这样叙述：*哪些几何作图在理论上是可能的，而哪些又是不可能的？* 为了确切地定义“作图”一词的意思，我们必须指明在每种情形下所要用的工具．我们将考虑：

1. 直尺和圆规；

2. 仅仅圆规；

3. 仅仅直尺；

4. 与直尺和圆规有联系的其他工具．

惊讶之处是初等几何没能对此问题提供解答．我们必须求助于代数和高等分析．随之产生的问题是：我们如何用代数和分析的语言来描述直尺和圆规的作图？因为初等几何并不像后两类学科，它没有一般的方法，更没有 *算法* ，所以这种新的处理方法就变得十分必要．

在分析中，我们首先有 *有理* 运算：加、减、乘、除．借助于比例方法，这些运算可以几何地直接实施在两给定线段上．如果在除法和乘法的情形，我们要引入一个辅助的单位线段．

进而，分析中也有 *无理* 运算，细分为 *代数的* 和 *超越的* 运算．最简单的代数运算是开平方和开高次方，以及没有求根公式的代数方程的求解，比如五次和更高次的代数方程．众所周知，通过一般的有理运算和仅含平方根的无理运算，我们就可以得到 $\sqrt{ab}$ 的作图．另一方面，每个 *单独* 的几何作图(它可以化为两直线之交，或直线与圆之交，或两圆之交)等价于有理运算或开平方运算．所以，对于更高次的无理运算，作图求解是不可能的，*除非我们可以找到借助平方根来实现这种运算的方法*．显然，在所有这些作图问题中运算次数必须是有限的．

至此，我们可以叙述下面的基本定理：

一个解析表达式能用直尺和圆规作图的充要条件是该式可以由某些已知量通过有限次的有理运算和开平方得到．

因此，如果我们想要证明一个量不能用尺规作图出来，我们必须证明相应的方程不能通过有限次开平方来求解．

当所讨论的问题没有相应的代数方程时，作图求解 *当然* 是不可能的．不满足任何代数方程的表达式被称为超越数．我们将证明，对于数 π 就会出现这种情况．

第一部分

代数表达式的作图可能性

第一章

可用平方根求解的代数方程

下面一些取自代数方程理论的命题，读者可能已经知道，但为了获得清晰的思路，我们将给出简要的证明.

如果一个量 x 只与有理式及平方根有关，那么它是一个不可约方程 $\phi(x)=0$ 的根，这个方程的次数是 2 的幂.

1. 为了对量 x 的结构有一个清楚的概念，例如，可设为如下形式

$$x=\frac{\sqrt{a+\sqrt{c+ef}}+\sqrt{d+\sqrt{b}}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{p+\sqrt{q}}{\sqrt{r}},$$

其中 a,b,c,d,e,f,p,q,r 是有理式.

2. 在 x 的任一项中，重叠根号的次数称为该项的*阶数*；上式中含有阶数为 $0,1,2$ 的项.

3. 用 μ 表示*最大阶数*，使得任一项中的重叠根号的次数都不超过 μ.

4. 在例子 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ 中，我们有三个一阶项，但它又可以写成

$$x=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3},$$

因而它实际上只有两个不同的项.

我们将假设：x 的一切项都做了上面那种分解，使得在 n 个 μ 阶项中，没有一个可以由其他 $n-1$ 个 μ 阶项或低阶项来有理地表示.

对于 $\mu-1$ 阶项或更低阶的项，无论它是显式还是隐式，我们也将作同样的假设. 这个假设显然是十分自然的，并且在后面的讨论中是极其重要的.

5. x 的正规形式.

如果表达式 x 是一些不同分母的项之和，则我们可以通分化简，使得 x 成为两个整函数的商.

假设 $\sqrt{Q}$ 是 x 中的 μ 阶项；由于 μ 是最大阶数，所以它只能以显式出现. 又因为 $\sqrt{Q}$ 的幂可以表示成 $\sqrt{Q}$ 和 Q 的函数，其中 Q 是低一阶的项，故我们可以令

$$x=\frac{a+b\sqrt{Q}}{c+d\sqrt{Q}},$$

其中除了低阶项外， a,b,c,d 至多包含 $n-1$ 个 μ 阶项.

对分式的上下同时乘以 $c-d\sqrt{Q}$,则 $\sqrt{Q}$ 从分母中消失，我们就有

$$x=\frac{(ac-bdQ)+(bc-ad)\sqrt{Q}}{c^2-d^2Q}=\alpha+\beta\sqrt{Q},$$

其中 α 和 β 至多包含 $n-1$ 个 μ 阶项.

对于第二个 μ 阶项 Q_1,用同样方法处理，我们有 $x=\alpha_1+\beta_1\sqrt{Q}_1$,以此类推.

所以，*x 可化为只在分子中含有给定的 μ 阶项的形式，并且关于每个 μ 阶项都是线性的.*

然而，我们注意到，由于 α 和 β 仍与 $n-1$ 个 μ 阶项有关，故可能出现 μ 阶项的乘积. 于是我们可置

$$\alpha=\alpha_{11}+\alpha_{12}\sqrt{Q_1},\qquad \beta=\beta_{11}+\beta_{12}\sqrt{Q_1},$$

从而有

$$x=(\alpha_{11}+\alpha_{12}\sqrt{Q_1})+(\beta_{11}+\beta_{12}\sqrt{Q_1})\sqrt{Q}.$$

6. 对于在 $Q,Q_1,\cdots$ 等项中显式出现的那些 $\mu-1$ 阶项，我们用类似的方法处理，使得每个量都变成 $\mu-1$ 阶项的整线性函数. 然后我们继续对更低阶的项做同样的事情，最后得出 x 或 x 的各个不同阶的项，都被表示成单个根式的有理整线性函数的显式. 这时我们就说 x 化成了 *正规形式*.

7. 设 m 是这种正规形式中独立 (按 **4.** 中意义) 的平方根的个数. 将这些平方根冠以正负号，并用一切可能的方式把它们组合起来，我们就得到一组数值，共 2^m 个：

$$x_1, x_2, \cdots, x_{2^m},$$

称之为*共轭值*.

现在我们必须研究以这些共轭值为根的方程.

8. 这些值不一定是完全不同的. 比如我们有

$$x = \sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}},$$

那么当改变 $\sqrt{b}$ 的符号时，这个表达式并没有变.

9. 若 x 是任一量，并作多项式

$$F(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{2^m}),$$

$F(x)=0$ 显然是以这些共轭值为根的方程. 它是 2^m 次的，但可能含有重根 (见 **8.**).

多项式 $F(x)$ 按 x 幂排列的系数均是有理的.

假设我们改变其中一个平方根的符号，因为 $F(x)=0$ 的根就是全体共轭值，故这只是置换了两个根，譬如是 x_λ 和 $x_{\lambda'}$. 由于这些根都是以积的形式

$$(x-x_\lambda)(x-x_{\lambda'})$$

出现在 $F(x)$ 中，所以我们仅仅改变了 $F(x)$ 中因子的次序，而多项式没有变.

当我们改变任一平方根的符号时， $F(x)$ 都保持不变，故 $F(x)$ 仅包含这些平方根的平方. 所以， $F(x)$ 只有有理系数.

10. *若一个共轭值满足给定的有理系数方程 $f(x)=0$, 则其余的共轭值也满足此方程.*

$f(x)$ 不一定等于 $F(x)$, 它可以具有除 x_i 外的其他根.

令 $x_1=\alpha+\beta\sqrt{Q}$ 是一个共轭值， $\sqrt{Q}$ 是一个 μ 阶项， α 和 β 仅与其他的 μ 阶项及低阶项有关. 于是，一定还有一个共轭值

$$x_1{}' = \alpha-\beta\sqrt{Q}.$$

现作方程 $f(x_1)=0$. 可设 $f(x_1)$ 为 $\sqrt{Q}$ 的正规形式,

$$f(x_1)=A+B\sqrt{Q};$$

此式等于零仅当 A 和 B 同时等于零. 否则我们将有

$$\sqrt{Q}=-\frac{A}{B};$$

即 $\sqrt{Q}$ 能有理地表示为含在 A 和 B 中的 μ 阶项和低阶项的函数, 这与所有平方根的独立性假设 (**4.**) 相矛盾.

显然, 我们有

$$f(x_1{}')=A-B\sqrt{Q};$$

因此, 若 $f(x_1)=0$, 则 $f(x_1{}')=0$. 于是可得下面的命题:

若 x_1 满足方程 $f(x_1)=0$, 则通过改变 x_1 中任何 μ 阶项内根的符号而得的一切共轭值也满足此方程.

对于其他共轭值的证明可类似地得到. 例如, 不失一般性, 我们可设表达式 x_1 仅依赖于两个 μ 阶项 $\sqrt{Q}$ 和 $\sqrt{Q'}$. $f(x_1)$ 就可以化成下面的正规形式:

$$\text{(a)}\qquad f(x_1)=p+q\sqrt{Q}+r\sqrt{Q'}+s\sqrt{Q}\cdot\sqrt{Q'}=0.$$

如果 x_1 依赖于更多的 μ 阶项, 则我们只要在这个表达式中添加更多的类似结构的项.

方程 (a) 成立当且仅当

$$\text{(b)}\qquad p=0,\qquad q=0,\qquad r=0,\qquad s=0.$$

否则 $\sqrt{Q}$ 和 $\sqrt{Q'}$ 将有理地相关 (线性分式相关), 这与我们的假设矛盾.

现设 $\sqrt{R},\sqrt{R'},\cdots$ 是 x_1 中的 $\mu-1$ 阶项, 它们出现在 p,q,r,s 中; 并且 p,q,r,s 这些量已化成关于 $\sqrt{R}$ 和 $\sqrt{R'}$ 的正规形式. 为了简单起见, 我们仅取两个项 $\sqrt{R}$ 和 $\sqrt{R'}$, 从而有

$$\text{(c)}\qquad p=\kappa_1+\lambda_1\sqrt{R}+\mu_1\sqrt{R'}+\nu_1\sqrt{R}\cdot\sqrt{R'}=0,$$

以及对于 q,r,s 的三个类似方程.

同样, 根据 (**4.**) 中的独立性假设, 我们有

$$\text{(d)}\qquad \kappa_1=0,\qquad \lambda_1=0,\qquad \mu_1=0,\qquad \nu_1=0.$$

因此，当我们用改变 $\sqrt{R}$ 和 $\sqrt{R'}$ 之符号后的共轭值替代 x_1 时，方程 (c) 仍然满足，从而 $f(x)=0$ 也满足.

所以，*通过改变 x_1 中 $\mu-1$ 阶项内根的符号而导出的所有共轭值也满足方程 $f(x)=0$.*

对于阶数为 $\mu-2, \mu-3, \cdots$ 的项，同理可推知，因而我们的定理完全得证.

11. 到目前为止，我们只考虑了两个方程

$$F(x)=0 \qquad 和 \qquad f(x)=0.$$

两者都具有有理系数，并且都以 x_i 为其根. $F(x)$ 是 2^m 次的，可能有重根；$f(x)$ 可能有除 x_i 外的其他根. 我们现在引进第三个方程 $\phi(x)=0$，它被定义为具有有理系数的、以 x_1 为根 (根据 **10.**，从而也以所有 x_i 为根) 的、次数最低的方程.

12. 方程 $\phi(x)=0$ 的性质.

I. $\phi(x)=0$*是一个不可约方程*，即 $\phi(x)$ 不能分解成两个有理多项式的乘积. 这是由于已经假设 $\phi(x)=0$ 是以 x_i 为根的次数*最低*的有理方程.

否则，若我们有

$$\phi(x)=\psi(x)\chi(x),$$

则 $\phi(x_1)=0$ 意味着或者 $\psi(x_1)=0$，或者 $\chi(x_1)=0$，或者两者都为零. 但根据 (**10.**)，所有共轭值也满足这些方程，从而 $\phi(x)=0$ 就不是以 x_i 为根的最低次方程.

II. $\phi(x)=0$*没有重根*. 否则 $\phi(x)$ 就可以用熟知的代数方法分解成有理因式，从而 $\phi(x)=0$ 不是不可约方程.

III. $\phi(x)=0$*除 x_i 外没有其他的根*. 否则 $F(x)$ 和 $\phi(x)$ 就会有一个最大公约式，并且这个公约式是可以有理地决定的. 这样，我们就可以把 $\phi(x)$ 分解成有理因式，从而 $\phi(x)$ 不是不可约的.

IV. 设 M 是 x_i 中不相同值的个数，并设这些值是

$$x_1, x_2, \cdots, x_M.$$

于是我们有

$$\phi(x)=C(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_M).$$

故 x_i 是 $\phi(x)=0$ 的根，并且没有重根. 这样，多项式 $\phi(x)$ 被确定到只差一常因子，这个常因子对 $\phi(x)=0$ 没有任何影响.

V. $\phi(x)=0$是仅有的以 x_1 从而以 x_i 为根且具有有理系数的不可约方程. 因为若 $f(x)=0$ 是另一个满足这样条件的不可约方程, 则 $f(x)$ 可以被 $\phi(x)$ 整除, 从而它不是不可约的. 由于 $\phi(x)=0$ 有以上的五个性质, 故我们可以把它简称为 *以 x_i 为根的不可约方程.*

13. 现在我们来比较一下 $F(x)$ 和 $\phi(x)$. 这两个多项式都是以 x_i 为仅有的根, 而 $\phi(x)$ 没有重根. 所以 $F(x)$ 可以被 $\phi(x)$ 整除; 即

$$F(x)=F_1(x)\phi(x).$$

其中 $F_1(x)$ 必具有有理系数, 因为它是 $F(x)$ 和 $\phi(x)$ 的商. 如果 $F_1(x)$ 不是常数, 那么它至少和 $F(x)$ 有一公共根; 又根据 **(10.)**, 则所有 x_i 均是它的根. 因此 $F_1(x)$ 也可以被 $\phi(x)$ 整除, 从而

$$F_1(x)=F_2(x)\phi(x).$$

如果 $F_2(x)$ 也不是常数, 那么同理可继续做下去, 每次都使商的次数减小. 因此, 在有限步之后, 我们可得如下方程

$$F_{\nu-1}(x)=C_1\cdot\phi(x),$$

从而

$$F(x)=C_1\cdot[\phi(x)]^{\nu}.$$

所以, *除差一常因子外, 多项式 $F(x)$ 是最低次多项式 $\phi(x)$ 的幂.*

14. 现在我们可以决定 $\phi(x)$ 的次数 M. $F(x)$ 是 2^m 次的; 又因为它是 $\phi(x)$ 的 ν 次幂, 因此

$$2^m=\nu\cdot M.$$

所以, M 也是 2 的幂, 并且我们得下列定理:

若一个不可约方程的根仅仅由平方根组合而成, 则该方程的次数总是 2 的幂.

15. 另一方面, 因为根据 **(12., V)**, 只有一个以 x_i 为根的不可约方程, 所以我们有下列逆否定理:

如果一个不可约方程的次数不是 2^h, 那么它不可能用平方根来求解.

第二章

Delian 问题和角的三等分

---

1. 现把上一章的主要定理应用于 Delian 问题, 即 *倍立方* 问题. 该问题的方程显然是

$$x^3 = 2\,.$$

这是一个不可约方程, 否则 $\sqrt[3]{2}$ 将取有理数值, 因为可约的三次方程必定有一个线性有理因子. 更进一步, 由于该方程的次数不是 2^h 的形式, 所以它不可能用平方根来求解, 从而也不可能用直尺和圆规来几何作图.

2. 其次, 我们考虑更一般的方程

$$x^3 = \lambda\,.$$

参数 λ 可以是具有 $a + ib$ 形式的复变量. 该方程为我们提供了多倍立方体和任意角三等分等几何问题的解析表示. 现在的问题是该方程是否可约, 即是否有一个根可表示为 λ 的有理函数. 应该注意, 一个表达式的不可约性总是与已知量的取值有关. 在 $x^3 = 2$ 的情况, 我们涉及的是数量, 考虑的问题是 $\sqrt[3]{2}$ 是否能取有理数值. 对于方程 $x^3 = \lambda$, 我们要问是否有一个根可表示为 λ 的有理函数. 在第一种情形下, 所谓的 *有理域* 包括有理数全体; 在第二种情形下, 它是由参数 λ 的有理函

数组成的. 如果对参数没有任何限制，我们马上可以看到，形如 $\frac{\phi(\lambda)}{\psi(\lambda)}$ 的表达式都不满足我们的方程，其中 $\phi(\lambda)$ 和 $\psi(\lambda)$ 是多项式. 因此，在我们的假设下，方程是不可约的；并且因为它的次数不具有 2^h 的形式，故不能用平方根求解.

3. 现在我们限制 λ 的变化. 假设

$$\lambda = r(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)$$

从而，$\sqrt[3]{\lambda} = \sqrt[3]{r}\sqrt[3]{\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi}$.

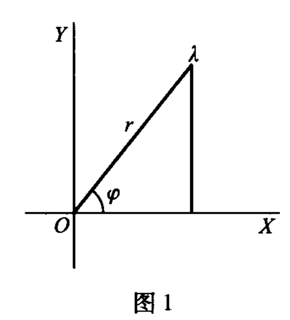


图 1

我们的问题就一分为二：实数的开立方和形如 $\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi$ 的复数的开立方，两者都是任意的. 我们将分别论述之.

I. 方程 $x^3 = r$ 的根为

$$\sqrt[3]{r},\ \epsilon\sqrt[3]{r},\ \epsilon^2\sqrt[3]{r}\ ,$$

其中 ϵ 和 ϵ^2 表示复的单位立方根

$$\epsilon = \frac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2},\ \epsilon^2 = \frac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\ .$$

取有理域为全体 r 的有理函数，则由前面推理，我们知道方程 $x^3 = r$ 是不可约的. 因此，一般而言，多倍立方问题不可能用尺规作图求解.

II. 根据 De Moivre 公式，方程

$$x^3 = \cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi$$

的根是

$$x_1 = \cos\frac{\phi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\phi}{3}\ ,$$

$$x_2 = \cos\frac{\phi + 2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\phi + 2\pi}{3},$$
$$x_3 = \cos\frac{\phi + 4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\phi + 4\pi}{3}.$$

这些根在几何上表示为以原点为圆心的单位圆中内接等边三角形的顶点. 图 2 指出了角度 $\frac{\phi}{3}$ 对应于根 x_1. 因此, 方程

$$x^3 = \cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi$$

是三等分角问题的解析表达式.

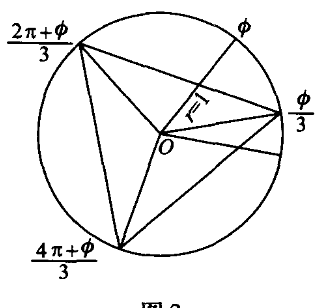


图 2

如果该方程可约, 那么至少有一根可由 $\cos\phi$ 和 $\sin\phi$ 的有理函数表示, 当 ϕ 用 $\phi + 2\pi$ 代换时, 它的值不变. 但若对角 ϕ 连续地作这种变换, 则可看到根 x_1, x_2, x_3 被作了循环置换. 因此, 没有一根能表示为 $\cos\phi$ 和 $\sin\phi$ 的有理函数. 所以, 所考虑的方程是不可约的, 因而不可能借助于有限个平方根来求解. 因此, 角的三等分不可能仅用直尺和圆规来作出.

只要 ϕ 是任意的角, 这个证明和一般的定理显然成立; 但对于 ϕ 的某些特殊值, 可以证明尺规作图是可能的, 例如, $\phi = \frac{\pi}{2}$.

第三章

圆的等分

1. 将一给定的圆分成 n 等份的问题自古已有；在很长时间内，我们只知道当 $n = 2^h, 3, 5$ 或是其中几个数的乘积时，这个问题是可解的. 在 Gauss 的著作 *Disquisitiones Arithmeticae* 中，他扩展了这个数列 [Euclid 数列], 他证明对每一个形如 $p = 2^{2^\mu} + 1$ 的素数，将圆 p 等分是可能的，但是对于所有其他素数和它们的乘幂都是不可能的. 若在 $p = 2^{2^\mu} + 1$ 中，取 $\mu = 0, 1$, 则 $p = 3, 5$, 即上述已知的情况. 令 $\mu = 2$, 得 $p = 2^{2^2} + 1 = 17$, 这是由 Gauss 给出完整讨论的情况.

令 $\mu = 3$, 同样得素数 $p = 2^{2^3} + 1 = 257$. 正 257 边形是可以作图的. 类似地对于 $\mu = 4, p = 65537$ 也是一个素数. 然而，当 $\mu = 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 15, 18, 23, 36, 38, 73$ 时 p 均不是素数. 对应于 $\mu = 5, 6, \cdots, 38, 73$ 的这些大数，它们不是素数的证明需要辛勤的计算和高度的智慧. 因此，$\mu = 4, p = 65537$ 很可能就是能把圆等分的最大数了.

关于正 257 边形，Richelot 作了一个推广研究，发表于 Crelle's *Journal,* IX, 1832, pp.1～26, 146～161, 209～230, 337～356. 论文的题目是 *De resolutione algebraica aequationis* $x^{257} = 1$, *sive de divisione circuli per bisectionem anguli septies repetitam in partes 257 inter se aequales commentatio*

coronata.

Lingen 的 Hermes 教授在正 65537 边形上耗费了十年心血，对由 Gauss 方法得到的全部根做了详细检验．他的手稿保存在 Göttingen 数学研究院的珍藏文集内．(可参照 Hermes 教授在 "*Göttingen Nachrichten*, No.3, 1894" 上的通报．)

2. 我们可把圆的 n 等分问题限于 n 为素数 p 或素数的幂 p^α. 如果 $n(=\mu\nu)$ 是一合数， μ,ν 是 n 的互素因子，则我们总可找到 (正或负) 整数 a,b 使得

$$1=a\mu+b\nu;$$

从而

$$\frac{1}{\mu\nu}=\frac{a}{\nu}+\frac{b}{\mu}.$$

这样，为了将圆分为 $n=\mu\nu$ 等份，只要知道如何将圆分别分为 μ 和 ν 等份．例如 $n=15$, 我们有

$$\frac{1}{15}=\frac{2}{3}-\frac{3}{5}.$$

3. 正如将要所证，一个圆能分为 p 等份 (p 为素数), 仅当 p 有 2^h+1 的形式．下面将先证明：一个素数能有这样的形式，仅当 $h=2^\mu$. 为此，我们将要用到 Fermat 的定理：

如果 p 是一个素数， a 是一个不能被 p 整除的整数，则它们满足下列同余式

$$a^{p-1}\equiv+1(\text{mod. }p).$$

对于 a 的给定值， $p-1$ 并不一定是满足上述同余式的最小幂．如果 s 是最小幂，则可以证明 s 是 $p-1$ 的除子 (即 $p-1$ 可被 s 整除). 特别若 $s=p-1$, 则称 a 为 p 的一个 *原根*. 注意，每个素数 p 都有一个原根，这一点下面我们要用到．

设 p 为一素数，使得

$$(1)\qquad p=2^h+1,$$

s 为满足下式的最小整数：

$$(2)\qquad 2^s\equiv+1(\text{mod. }p).$$

从 (1) 式得 $2^h < p$; 从 (2) 式得 $2^s > p$. 所以

$$s > h.$$

(1) 式表明 h 是满足下列同余式的最小整数:

$$(3) \qquad 2^h \equiv -1(\mathrm{mod.}\ p).$$

(2) 与 (3) 相除，有

$$2^{s-h} \equiv -1(\mathrm{mod.}\ p).$$

所以

$$(4) \qquad s - h \not< h, \quad s \not< 2h.$$

(3) 式平方

$$2^{2h} \equiv 1(\mathrm{mod.}\ p)$$

与 (2) 式比较，由于 s 是满足下列同余式的最小指数:

$$2^x \equiv 1(\mathrm{mod.}\ p),$$

故有

$$(5) \qquad s \not> 2h.$$

所以

$$s = 2h.$$

我们已知， s 是 $p - 1 = 2^h$ 的除子；故 h 亦然，因而 h 为 2 的幂. 所以，形如 $2^h + 1$ 的素数必为 $2^{2^\mu} + 1$ 的形式.

4. 这个结论也可用其他方法来建立. 设 h 可被一奇数整除，从而

$$h = h'(2n + 1);$$

由于公式

$$x^{2n+1} + 1 = (x + 1)(x^{2n} - x^{2n-1} + \cdots - x + 1),$$

故 $p = 2^{h'(2n+1)} + 1$ 可以被 $2^h + 1$ 所整除，因此 p 不是素数.

5. 现在我们可得下列基本命题:

设 p 为素数，除非 p 具有形式

$$p = 2^h + 1 = 2^{2^\mu} + 1,$$

否则不可能用直尺和圆规将一个圆 p 等分.

在复平面 $(z = x + \mathrm{i}y)$ 上作单位圆. 把这个圆从 $z = 1$ 开始 p 等分，这等价于解方程

$$z^n - 1 = 0.$$

这个方程有一个根 $z = 1$; 将方程除以 $z - 1$, 我们可消去这个根；这在几何上就是不考虑等分的初始点. 这样，我们得到方程

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 = 0,$$

称之为*割圆方程*. 如上所述，我们可专注于 n 为素数或素数的幂的情形. 先研究 $n = p$ 的情况. 证明的要点是要证明*上述方程是不可约的*. 于是，正如我们所知，仅当不可约方程的次数为 2 的幂时，它才能通过有限个平方根求解. 当 $p - 1$ 不是 2 的幂时，即

$$p \neq 2^{h+1} \neq 2^{2^\mu+1},$$

要把一个圆 p 等分总是不可能的. 至此，我们就明白为什么 Gauss 的素数占有这样的特殊地位.

6. 这里我们引入著名的 Gauss *引理*. 如果

$$F(z) = z^m + Az^{m-1} + Bz^{m-2} + \cdots + Lz + M,$$

其中 $A, B, \cdots, M$ 为整数，并且 $F(z)$ 可分解为两个有理因式 $f(z)$ 和 $\phi(z)$, 从而

$$\begin{aligned} F(z) = f(z) \cdot \phi(z) =& (z^{m'} + \alpha_1 z^{m'-1} + \alpha_2 z^{m'-2} + \cdots) \\ & (z^{m''} + \beta_1 z^{m''-1} + \beta_2 z^{m''-2} + \cdots), \end{aligned}$$

那么，诸 α_i 和诸 β_i 也必是整数. 换言之，

若一个整系数多项式可分解为有理因式之积，则这些因式也必为整系数多项式.

设诸 α_i 和诸 β_i 为分数. 在每个因式中求出所有系数的分母的最小公倍数. 令 a_0, b_0 为这两个最小公倍数. 用 $a_0 b_0$ 分别乘上述方程的两边，得

$$\begin{aligned} a_0 b_0 F(z) = f_1(z)\phi_1(z) =& (a_0 z^{m'} + a_1 z^{m'-1} + \cdots) \\ & (b_0 z^{m''} + b_1 z^{m''-1} + \cdots). \end{aligned}$$

因为 a_0 和 b_0 是分母的最小公倍数，故诸 a_i 均为整数且互素，诸 b_i 亦然.

假定 a_0, b_0 均不为 1, 记 q 为 a_0b_0 的一个素因子. 令 a_i 和 b_k 分别为 $f_1(z)$ 和 $\phi_1(z)$ 中第一个不能被 q 整除的系数. 把 $f_1(z)\phi_1(z)$ 展开，考虑项 $z^{m'+m''-i-k}$ 的系数，它是

$$a_ib_k + a_{i-1}b_{k+1} + a_{i-2}b_{k+2} + \cdots + a_{i+1}b_{k-1} + a_{i+2}b_{k-2} + \cdots.$$

根据我们的假设，上述和式中第一项之后的各项均可以被 q 整除，而第一项不能被 q 整除. 因此，整个和式不能被 q 整除. 但是，由上述等式的左边知， $z^{m'+m''-i-k}$ 的系数可以被 a_0b_0 整除，从而可以被 q 所整除. 因此，如果等式为真，则每个多项式因子中不可能出现不能被 q 整除的系数，即至少有一个多项式因子的系数全都能被 q 整除. 然而我们已知所有系数都是互素的，故又得矛盾. 所以，我们不能假设 a_0, b_0 均不为 1, 因而诸 α_i 和诸 β_i 均为整数.

7. 为了证明割圆方程是不可约的，根据 Gauss 引理，只要证明第一个有理式 $f(z)$ 不能分解为具有整系数的因子之积. 为此，我们将运用 Eisenstein 的简单方法 (见 Crelle's *Journal,* XXXIX, p.167), 它依赖于替换

$$z = x + 1.$$

我们得

$$f(z) = \frac{z^p - 1}{z - 1} = \frac{(x+1)^p - 1}{x} = x^{p-1} + px^{p-2} + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}x^{p-3} + \cdots + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2}x + p = 0.$$

除第一项外，展开式的所有系数都可被 p 整除；最后一个系数总是 p 本身，由假设它是素数. 这类表达式总是不可约的.

如若不然，应有

$$f(x+1) = (x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m)(x^{m'} + b_1x^{m'_1-1} + \cdots + b_{m'-1}x + b_{m'}),$$

其中诸 a_i 和诸 b_j 都是整数.

因为 $f(z)$ 的上述表达式的 0 次项是 p, 所以有 $a_mb_{m'} = p$. 但 p 是素数，故 $a_mb_{m'}$ 中必有一个因子是 1. 假设

$$a_m = \pm p, \quad b_{m'} = \pm 1.$$

令 x 项的系数相等，我们有

$$\frac{p(p-1)}{2} = a_{m-1}b_{m'} + a_m b_{m'-1}.$$

由于左边和右边第二项的第一个因子都可被 p 整除，从而 $a_{m-1}b_{m'}$ 也必可被 p 整除. 因为 $b_{m'} = \pm 1$, 故 a_{m-1} 可被 p 整除. 令 x^2 项的系数相等，同理可证 a_{m-2} 也可被 p 整除. 类似地我们可证明：因式

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$$

中的其余系数也可被 p 整除. 但是， x^m 项的系数是 1, 它不可能被 p 整除. 这说明上面假定的等式不真. 因此，当 p 为素数时，割圆方程是不可约的.

8. 现在我们考虑 n 是一个素数的幂的情况，例如 $n = p^\alpha$. 我们要证明当 $p > 2$ 时，将圆分为 p^2 等份是不可能的. 因为圆的 p^α 等分显然包括了圆的 p^2 等分，因此一般的圆等分问题也就解决了.

现在的割圆方程是

$$\frac{z^{p^2} - 1}{z - 1} = 0.$$

它容有圆的 p 等分问题所产生的那些根，即容有方程

$$\frac{z^p - 1}{z - 1} = 0$$

的根. 除去这些根后我们得割圆方程

$$f(z) = \frac{z^{p^2} - 1}{z^p - 1} = 0,$$

这个方程可写为

$$z^{p(p-1)} + z^{p(p-2)} + \cdots + z^p + 1 = 0.$$

作变换

$$z = x + 1,$$

我们有

$$(x+1)^{p(p-1)} + (x+1)^{p(p-2)} + \cdots + (x+1)^p + 1 = 0.$$

方程的项数是 p, 展开后的常数项也是 p, 从而和式将取如下形式:

$$x^{p(p-1)} + p \cdot \chi(x),$$

其中 $\chi(x)$ 是常数项为 1 的整系数多项式. 我们已经证明了这样的多项式总是不可约的. 因此, 新的割圆方程也是不可约的.

这个方程的次数是 $p(p-1)$. 另一方面, 一个不可约方程可用平方根求解, 仅当其次数是 2 的幂. 因此, 一个圆可以分为 p^2 等份, 仅当 $p = 2$(p 假定为素数).

正如上面所说, 对于 $\alpha > 2$ 的圆的 p^α 等分, 同样的结论也真.

第四章

正 17 边形的几何作图

---

1. 我们已知，仅对于 Gauss 所研究的素数 p, 才能用直尺和圆规将圆 p 等分. 现在的兴趣是要了解如何能具体地实施作图.

本章的目的是要说明如何用初等方法在圆中作内接正 17 边形.

因为我们还没有基于纯几何考虑的作图方法，所以必须根据一般讨论所指示的途径去做. 首先，我们考虑下列割圆方程的根：

$$x^{16}+x^{15}+\cdots+x^2+x+1=0,$$

并且把由此导出的用平方根组成的表达式几何地作图出来.

我们知道这些根可表示为如下的超越形式：

$$\epsilon_\kappa=\cos\frac{2\kappa\pi}{17}+\mathrm{i}\,\sin\frac{2\kappa\pi}{17}\ \ (\kappa=1,2,\cdots,16)\,;$$

并且如果

$$\epsilon_1=\cos\frac{2\pi}{17}+\mathrm{i}\,\sin\frac{2\pi}{17},$$

那么，

$$\epsilon_\kappa={\epsilon_1}^\kappa.$$

在几何上，这些根可用复平面上以原点为圆心的单位圆中内接正 17 边形的非 1 顶点来表示. ϵ_1 的选择是任意的，但对作图来说，重要

的是指定某个 ϵ 作为起始分点. 选定 ϵ_1 后, 对应于 ϵ_κ 的角度是 ϵ_1 对应角度的 κ 倍, 从而完全决定了 ϵ_κ.

2. 求解问题的基本思路如下: *作出关于模 17 的原根, 我们就可把方程的 16 个根按确定的循环顺序排列.*

正如先前所述, 当同余式

$$a^s \equiv +1 (\text{mod. } 17)$$

有最小解 $s = 17 - 1 = 16$ 时, a 被称为关于模 17 的原根. 数 3 就有这个性质, 因为我们有

$$\left.\begin{array}{llll} 3^1 \equiv 3 & 3^5 \equiv 5 & 3^9 \equiv 14 & 3^{13} \equiv 12 \\ 3^2 \equiv 9 & 3^6 \equiv 15 & 3^{10} \equiv 8 & 3^{14} \equiv 2 \\ 3^3 \equiv 10 & 3^7 \equiv 11 & 3^{11} \equiv 7 & 3^{15} \equiv 6 \\ 3^4 \equiv 13 & 3^8 \equiv 16 & 3^{12} \equiv 4 & 3^{16} \equiv 1 \end{array}\right\} (\text{mod. } 17) .$$

我们对根 ϵ_κ 进行如下排序, 使得它们的下标恰为上面各式的余数:

$$\epsilon_3, \epsilon_9, \epsilon_{10}, \epsilon_{13}, \epsilon_5, \epsilon_{15}, \epsilon_{11}, \epsilon_{16}, \epsilon_{14}, \epsilon_8, \epsilon_7, \epsilon_4, \epsilon_{12}, \epsilon_2, \epsilon_6, \epsilon_1 .$$

注意, 如果 r 是 3^κ 的余数 (mod. 17), 则我们有

$$3^\kappa = 17q + r ,$$

从而

$$\epsilon_r = {\epsilon_1}^r = {\epsilon_1}^{3^\kappa} .$$

如果 r' 是下一个余数, 类似地我们有,

$$\epsilon_{r'} = {\epsilon_1}^{3^{\kappa+1}} = ({\epsilon_1}^{3^\kappa})^3 = (\epsilon_r)^3 .$$

因此, 在这个根数列中, 每个根是前一根的立方.

Gauss 的方法就是将这个循环数列分别分解为包含 $8, 4, 2, 1$(16 的对应因子) 个根的和式. 每个和式被称为一个周期. 这样得到的周期可作为某些二次方程的根逐次计算得到.

刚才略述的过程只是可用于圆 p 等分的一般情形的一个特例. 割圆方程的 $p-1$ 个根可以用 p 的原根来循环排列, 周期可作为某些辅助方程的根来计算. 辅助方程的次数依赖于 $p-1$ 的素因子, 它们并不一定是二次的.

对于一般情形，Gauss 在他的著作 *Disquisitiones* 中，以及 Bachmann 在他的工作 *Die Lehre von der Kreisteilung* (Leipzig, 1872) 中，都给出了详尽的论述.

3. 在我们 16 个根的情况下，周期可由以下方法找到：在循环数列中作两个 8 个根的周期，先由偶序数的根组成，然后由奇序数的根组成. 用 x_1 和 x_2 记这些周期，并且每个根用它的下标代替，我们就可符号地写出这些周期：

$$x_1 = 9 + 13 + 15 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1\,,$$

$$x_2 = 3 + 10 + 5 + 11 + 14 + 7 + 12 + 6\,.$$

对 x_1 和 x_2 以同法处理，我们就可作出由 4 项组成的 4 个周期：

$$y_1 = 13 + 16 + 4 + 1\,,$$
$$y_2 = 9 + 15 + 8 + 2\,,$$
$$y_3 = 10 + 11 + 7 + 6\,,$$
$$y_4 = 3 + 5 + 14 + 12\,.$$

对这些 y 又以同法处理，我们就得到由 2 项组成的 8 个周期：

$$z_1 = 16 + 1, \qquad z_5 = 11 + 6,$$
$$z_2 = 13 + 4, \qquad z_6 = 10 + 7,$$
$$z_3 = 15 + 2, \qquad z_7 = 5 + 12,$$
$$z_4 = 9 + 8, \qquad z_8 = 3 + 14.$$

现在还要证明的是*这些周期可以借助平方根逐次计算得到*.

4. 我们已经看到，构成一个周期的根所对应的余数之和总是等于 17. 于是，这些根是 ϵ_r 和 ϵ_{17-r};

$$\epsilon_r = \cos\, r\frac{2\pi}{17} + \mathrm{i}\,\sin\, r\frac{2\pi}{17}\,,$$

$$\epsilon_{r'} = \epsilon_{17-r} = \cos(17-r)\frac{2\pi}{17} + \mathrm{i}\,\sin(17-r)\frac{2\pi}{17} = \cos\, r\frac{2\pi}{17} - \mathrm{i}\,\sin\, r\frac{2\pi}{17}\,.$$

从而

$$\epsilon_r + \epsilon_{r'} = 2\cos\, r\frac{2\pi}{17}\,.$$

因此，所有周期 z 都是实的，并且我们已经得到

$$z_1 = 2\cos\frac{2\pi}{17}, \qquad z_5 = 2\cos 6\frac{2\pi}{17},$$
$$z_2 = 2\cos 4\frac{2\pi}{17}, \qquad z_6 = 2\cos 7\frac{2\pi}{17},$$
$$z_3 = 2\cos 2\frac{2\pi}{17}, \qquad z_7 = 2\cos 5\frac{2\pi}{17},$$
$$z_4 = 2\cos 8\frac{2\pi}{17}, \qquad z_8 = 2\cos 3\frac{2\pi}{17}.$$

而且，由定义，

$$x_1 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4,\quad x_2 = z_5 + z_6 + z_7 + z_8,$$

$$y_1 = z_1 + z_2,\ y_2 = z_3 + z_4,\ y_3 = z_5 + z_6,\ y_4 = z_7 + z_8 .$$

5. 有必要确定不同周期的相关大小. 为此目的，我们将引用下列技巧：将半个单位圆 17 等分，O 为半圆的起点，$A_1, A_2, \cdots, A_{17}$ 依次为分点，它们到起点 O 的距离分别记为 $S_1, S_2, \cdots, S_{17}$, 其中 S_{17} 等于直径，即等于 2. 角 $A_\kappa A_{17} O$ 等于弧 $A_\kappa O$ 的一半，即等于 $\frac{2\kappa\pi}{34}$. 因此

$$S_\kappa = 2\sin\frac{\kappa\pi}{34} = 2\cos\frac{(17-\kappa)\pi}{34} .$$

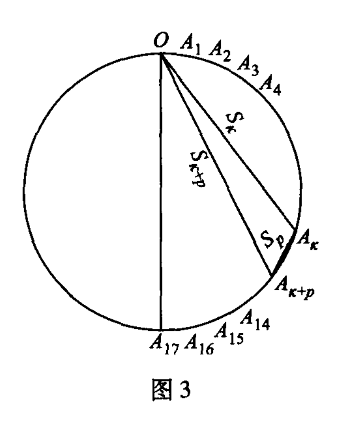


图 3

若它可与 $2\cos h\frac{2\pi}{17}$ 恒等，则必有

$$4h = 17 - \kappa,$$

$$\kappa = 17 - 4h.$$

令 h 取值 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, 我们就得到 κ 的值 $13, 9, 5, 1, -3, -7, -11, -15$. 因此

$$
\begin{aligned}
z_1 &= S_{13}, & z_5 &= -S_7,\\
z_2 &= S_1, & z_6 &= -S_{11},\\
z_3 &= S_9, & z_7 &= -S_3,\\
z_4 &= -S_{15}, & z_8 &= S_5.
\end{aligned}
$$

图3表明 S_κ 随下标的增长而增长；因而这些周期 z 的增长大小依次是

$$z_4, z_6, z_5, z_7, z_2, z_8, z_3, z_1 .$$

且弦 $A_\kappa A_{\kappa+p}$ 对向半圆周的 p 个等份，从而等于 S_p；三角形 $OA_\kappa A_{\kappa+p}$ 显示

$$S_{\kappa+p} < S_\kappa + S_p ,$$

并且自然有

$$S_{\kappa+p} < S_{\kappa+r} + S_{p+r'} .$$

计算周期 y 的两两之差，易得

$$
\begin{aligned}
y_1 - y_2 &= S_{13} + S_1 - S_9 + S_{15} > 0,\\
y_1 - y_3 &= S_{13} + S_1 + S_7 + S_{11} > 0,\\
y_1 - y_4 &= S_{13} + S_1 + S_3 - S_5 > 0,\\
y_2 - y_3 &= S_9 - S_{15} + S_7 + S_{11} > 0,\\
y_2 - y_4 &= S_9 - S_{15} + S_3 - S_5 < 0,\\
y_3 - y_4 &= -S_7 - S_{11} + S_3 - S_5 < 0.
\end{aligned}
$$

因此

$$y_3 < y_2 < y_4 < y_1.$$

最后，类似地可得

$$x_2 < x_1 .$$

6. 现在我们要计算 $z_1 = 2\cos\dfrac{2\pi}{17}$. 有了这个计算并将 z_1 作图之后，我们就容易推得正17边形的边了. 为了找到周期所满足的二次方程，我们要确定这些周期的对称函数.

周期 z_1 结合 z_2 构成了周期 y_1, 我们首先有,

$$z_1 + z_2 = y_1 .$$

现在让我们来确定 z_1z_2. 我们有

$$z_1z_2 = (16+1)(13+4)\,,$$

其中符号乘积 κp 表示

$$\epsilon_\kappa \cdot \epsilon_p = \epsilon_{\kappa+p}\,.$$

因此，它应该用 $\kappa+p$ 符号地表示，记住：应从 $\kappa+p$ 中尽可能多地减去 17. 这样,

$$z_1z_2 = 12+3+14+5 = y_4\,.$$

所以， z_1 和 z_2 是二次方程

$$(\zeta) \qquad z^2 - y_1 z + y_4 = 0$$

的根，其中由于 $z_1 > z_2$, 故

$$z_1 = \frac{y_1 + \sqrt{{y_1}^2 - 4y_4}}{2}, \qquad z_2 = \frac{y_1 - \sqrt{{y_1}^2 - 4y_4}}{2}\,.$$

现在我们必须确定 y_1 和 y_4. 周期 y_1 结合 y_2 构成周期 x_1, 周期 y_3 结合 y_4 构成周期 x_2, 我们首先有,

$$y_1 + y_2 = x_1\,.$$

然后,

$$y_1y_2 = (13+16+4+1)(9+15+8+2)\,.$$

把它符号地展开，等式右边就等于所有根之和，即等于 -1. 因此， y_1 和 y_2 是方程

$$(\eta) \qquad y^2 - x_1 y - 1 = 0$$

的根，其中由于 $y_1 > y_2$, 故

$$y_1 = \frac{x_1 + \sqrt{{x_1}^2 + 4}}{2}, \quad y_2 = \frac{x_1 - \sqrt{{x_1}^2 + 4}}{2}\,.$$

类似地,

$$y_3 + y_4 = x_2,$$

并且

$$y_3y_4 = -1\,.$$

因此， y_3 和 y_4 是方程

$$(\eta') \qquad y^2 - x_2 y - 1 = 0$$

的根，其中由于 $y_4 > y_3$，故

$$y_4 = \frac{x_2 + \sqrt{{x_2}^2 + 4}}{2}, \qquad y_3 = \frac{x_2 - \sqrt{{x_2}^2 + 4}}{2}.$$

余下来要确定 x_1 和 x_2. 由于 $x_1 + x_2$ 等于所有根之和，故

$$x_1 + x_2 = -1.$$

并且，

$$x_1 x_2 = (13+16+4+1+9+15+8+2)(10+11+7+6+3+5+14+12).$$

把它符号地展开，每个根都出现四次，因而

$$x_1 x_2 = -4.$$

所以，x_1 和 x_2 是二次方程

$$(\xi) \qquad x^2 + x - 4 = 0$$

的根，其中由于 $x_1 > x_2$，故

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \qquad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}.$$

逐次解方程 ξ, η, η', ζ，可见 z_1 被一系列平方根所决定.

由实际计算，我们看到 z_1 依赖于以下四个平方根，

$$\sqrt{17}, \ \sqrt{{x_1}^2 + 4}, \ \sqrt{{x_2}^2 + 4}, \ \sqrt{{y_1}^2 - 4y_4}.$$

如果我们希望把 z_1 化为正规形式，我们必须知道，这些平方根中是否有一个可由其他的来有理表示.

现在，从 $(\eta), (\eta')$ 的根可得，

$$\sqrt{{x_1}^2 + 4} = y_1 - y_2,$$
$$\sqrt{{x_2}^2 + 4} = y_4 - y_3.$$

把它符号地展开，不难验证

$$(y_1 - y_2)(y_4 - y_3) = 2(x_1 - x_2),$$ [1]

也即

$$\sqrt{x_1{}^2 + 4}\sqrt{x_2{}^2 + 4} = 2\sqrt{17}\,.$$

因此 $\sqrt{x_2{}^2 + 4}$ 可由其他两个平方根有理地表示. 该等式表明，如果三个差式 $y_1 - y_2, y_4 - y_3, x_1 - x_2$ 中有两个取正值，那么第三个也取正值，这与直接计算得到的结果一致.

现在把 x_1, y_1, y_4 用它们的实际数值代替，我们相继得到

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-1+\sqrt{17}}{2},\\
y_1 &= \frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{4},\\
y_4 &= \frac{-1-\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{4},\\
z_1 &= \frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}\\
&\quad+\frac{\sqrt{68+12\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2(1-\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}}}{8}.
\end{aligned}$$

---

[1]

$$\begin{aligned}
(y_1 - y_2)(y_4 - y_3) =&(13+16+4+1-9-15-8-2)\\
&(3+5+14+12-10-11-7-6)\\
=&16+1+10+8-6-7-3-2\\
&+2+4+13+11-9-20-6-5\\
&+7+9+1+16-14-15-11-10\\
&+4+6+15+13-11-12-8-7\\
&-12-14-6-4+2+3+16+15\\
&-1-3-12-10+8+9+5+4\\
&-11-13-5-3+1+2+15+14\\
&-5-7-16-14+12+13+9+8\\
=&2(16+1+8+2+4+13+15+9\\
&-10-6-7-3-11-5-14-12)\\
=&2(x_1 - x_2).
\end{aligned}$$

至此，求解我们问题的代数部分已经完成. 我们已经指出，还没有基于纯几何考虑的正 17 边形的作图方法. 所以，余下来只是对这些单独的代数步骤作出几何翻译.

7. 这里请允许我们介绍一下用直尺和圆规几何作图的简要历史.

在古代的几何学中，直尺和圆规总是一起使用的；为了不添加任何不必要的线条，困难仅在于汇集图形的不同部分. 至于作图中若干步是用直尺或是用圆规，则无关紧要.

相反，在 1797 年，意大利的 Mascheroni 仅仅用圆规成功地实现了所有作图；他把他的方法写在著作 *Geometria del compasso* 中，并且宣称用圆规作图在实用上比直尺要更精确. 正如他所明确指出，他是为力学写的，因此带有实用的观点. Mascheroni 的原著，很难阅读，我们得益于 Hutt 提供的简明德文译本，*Die Mascheroni'schen Constructionen* (Halle,1880).

随后不久，法国人，特别是 Carnot 的弟子，包括 *Géométrie de position* 的作者，他们从另一方面努力，使作图尽可能地只用直尺来实现. (也可参看 Lambert, *Freie Perspective*,1774.)

这里我们可以提一个问题，哪种代数能使我们直接回答：在什么情形下，一个代数问题的解可以只用直尺来图解呢？刚才提到的作者们没有给出一个充分明确的答案. 我们将说：

只使用直尺我们能将一切有理形式的代数表达式作图表示.

1818 年 Brianchon 以类似的观点发表了一篇题为 *Les applications de la théorie des transversales* 的文章，其中他证明了在很多情形下如何只使用直尺来实现作图. 他同样也强调了他的方法的实用性，特别适用于测量学的野外工作.

Poncelet 是第一个在他的著作 *Traité des propriétés projectives* (Vol. I, Nos. 351~357) 中构思了如下想法：用*一个给定的圆*(圆心是给定的) 连同平面上的直线就足以把一切与平方根有关的表达式作图表示.

1833 年， Steiner 在他的一篇著名论文中发展了这个思想，其题目为 *Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand für höhere Unterrichtsanstalten und zum Selbstunterricht.*

8. 为了作正 17 边形，我们将沿袭 von Staudt(Crelle's *Journal*, Vol. XXIV, 1842) 所指出的方法，后来 Schröter (Crelle's *Journal*, Vol. LXXV,

1872) 做了一些修改. 正 17 边形的作图是按 Poncelet 和 Steiner 所指出的方法作的, 因为除了用到一个给定圆外, 只用到直尺.[2]

首先, 我们要说明*只用直尺和一个固定的圆, 我们如何能求解每个二次方程.*

在给定单位圆 (图 4) 的直径两端, 引两条切线, 选取下面的一条作为 X 轴, 与其垂直的直径为 Y 轴. 那么圆的方程是

$$x^2+y(y-2)=0\,.$$

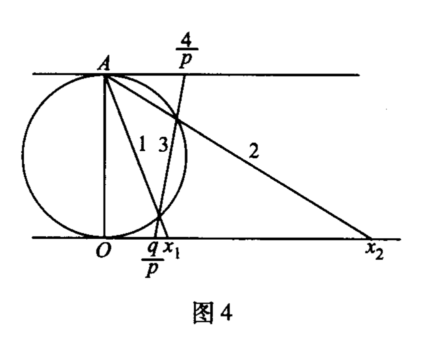


图 4

令

$$x^2-px+q=0$$

是任一具有实根 x_1 和 x_2 的二次方程. 现在需要在 X 轴上作出根 x_1 和 x_2.

在单位圆上方切线上从 A 点往右, 截取长度为 $\dfrac{4}{p}$ 的一段, 在 X 轴上从 O 点往右, 截取长度为 $\dfrac{q}{p}$ 的一段. 用直线 3 连接这两段的端点, 得圆与直线 3 的两交点; 再用从 A 点出发的直线 1 和直线 2 作这两交点到 X 轴的投影. 这样, 在 X 轴上截取了两段长度分别为 x_1 和 x_2 的线段.

证明 称 x_1 和 x_2 为 X 轴上的截距, 我们有直线 1 的方程

$$2x+x_1(y-2)=0\,;$$

直线 2 的方程

$$2x+x_2(y-2)=0\,.$$

[2]L.Gérard 的关于正 17 边形的 Mascheroni 作图, 发表于 *Math. Annalen*, Vol. XLVIII, 1896, pp. 390~392.

如果我们将这两个方程的左边相乘，则得

$$x^2+\frac{x_1+x_2}{2}x(y-2)+\frac{x_1x_2}{4}(y-2)^2=0\,,$$

它是由直线 1 和直线 2 组成的线对的方程. 将上式减去圆方程，我们得到

$$\frac{x_1+x_2}{2}x(y-2)+\frac{x_1x_2}{4}(y-2)^2-y(y-2)=0\,.$$

这是一个二次曲线方程，它经过直线 1 和直线 2 与圆的四个交点. 从该方程中我们可以消去对应于切线的因子 $y-2$, 剩下有,

$$\frac{x_1+x_2}{2}x+\frac{x_1x_2}{4}(y-2)-y=0\,,$$

它就是直线 3 的方程. 现在如果取 $x_1+x_2=p, x_1x_2=q$, 则得

$$\frac{p}{2}x+\frac{q}{4}(y-2)-y=0\,,$$

并且横截线 3 在 $y=2$ 上截取的长度为 $\frac{4}{p}$, 在 $y=0$ 上截取的长度为 $\frac{q}{p}$. 这样，作图的正确性就建立了.

9. 按照刚才说明的方法，现在我们将作出下列四个二次方程的根. 它们是 (见 pp. 29~31):

(ξ) $x^2+x-4=0$, 根为 x_1 和 x_2; $x_1>x_2$,
(η) $y^2-x_1y-1=0$, 根为 y_1 和 y_2; $y_1>y_2$,
(η') $y^2-x_2y-1=0$, 根为 y_3 和 y_4; $y_4>y_3$,
(ζ) $z^2-y_1z+y_4=0$, 根为 z_1 和 z_2; $z_1>z_2$.

这些方程将给出

$$z_1=2\cos\frac{2\pi}{17}\,,$$

从而容易作出所需的正多边形. 而且，我们注意，为了作出 z_1, 只要作出 x_1, x_2, y_1, y_4.

我们在圆上方的切线 $y=2$ 上，截取以下部分:

$$-4, \frac{4}{x_1}, \frac{4}{x_2}, \frac{4}{y_1};$$

在 X 轴上，截取:

$$+4, -\frac{1}{x_1}, -\frac{1}{x_2}, \frac{y_4}{y_1}\,.$$

这可以按以下方式来做：连接 X 轴上点 $+4$ 和切线 $y=2$ 上点 -4 的直线与单位圆交于两点，从圆的上顶点 $A(0,2)$ 出发，作这两点到 X 轴的投影，所得交点给出了第一个二次方程的两个根 x_1, x_2.

为了解第二个方程，我们应在上方截取 $\dfrac{4}{x_1}$, 在下方截取 $-\dfrac{1}{x_1}$.

为确定第一个点，我们连接 X 轴上点 x_1 和上顶点 A, 它与圆相交；从下顶点 O 作过该交点的直线，它在上面切线上截取的长度是 $\dfrac{4}{x_1}$. 这是容易解析证明的.

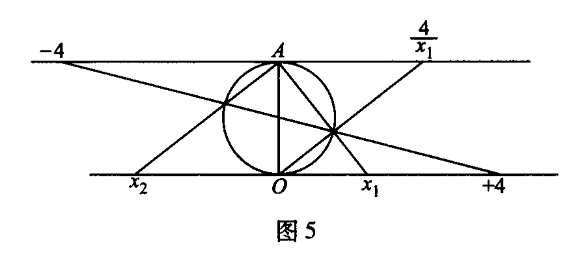


图 5

事实上，从 A 到 x_1 的直线方程为 (图 5),

$$2x + x_1 y = 2x_1\ ,$$

而圆方程为

$$x^2 + y(y-2) = 0\ ,$$

它们的交点坐标是

$$\frac{4x_1}{{x_1}^2+4},\quad \frac{2{x_1}^2}{{x_1}^2+4}\ .$$

从 O 点经过该交点的直线方程为，

$$y = \frac{x_1}{2}x\ ,$$

它在 $y=2$ 上截取的长度正是 $\dfrac{4}{x_1}$.

运用射影几何中的某些初等概念，我们可更简单地得到同样结论. 根据作图，我们显然已将下面直线的每一点与上面直线的一点 (仅一点) 对应起来，使得点 $x=\infty$ 对应于 $x'=0$, 反之亦然. 因为在这种对应下必存在一种线性关系，故上面直线的横坐标 x' 一定满足以下方程

$$x' = \frac{\text{const}}{x}\ .$$

由图 5 显见当 $x=2$ 时 $x'=2$, 故 $\text{const}=4$.

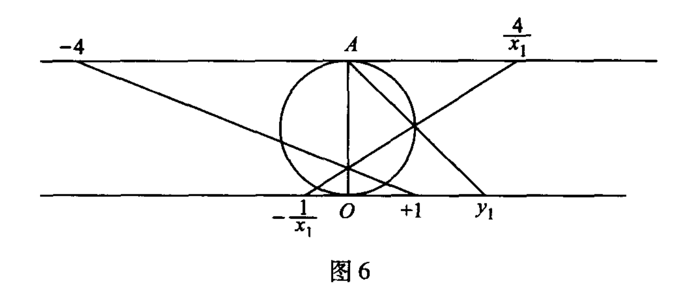


图 6

为了确定 X 轴上的点 $-\dfrac{1}{x_1}$, 我们连接上面切线的点 -4 和下面切线的点 $+1$(图 6). 这条连线与垂直的直径确定了一个交点, 把它与上面切线的点 $\dfrac{4}{x_1}$ 相连接. 该直线与 X 轴相交于 $-\dfrac{1}{x_1}$. 从 -4 到 $+1$ 的直线方程为

$$5y + 2x = 2,$$

它交垂直直径于点 $(0, \dfrac{2}{5})$. 因此, 从 $\dfrac{4}{x_1}$ 到该点的直线方程为

$$5y - 2x_1x = 2\,,$$

而它与下面切线的交点给出 $-\dfrac{1}{x_1}$.

从 $-\dfrac{1}{x_1}$ 到 $\dfrac{4}{x_1}$ 的直线与圆交于两点, 从点 A 出发, 作这两点到 X 轴的投影, 得第二个二次方程的两个根; 正如前面已指出, 我们只需要其中较大的根 y_1. 如图 6 所示, 它对应于上述直线与圆之交点的投影.

类似地, 我们可得第三个二次方程的根. 过点 A 在 X 轴上给出根 $+x_2$ 的直线交圆于一点, 从点 O 作该交点到上方切线的投影. 利用刚才说明的对应关系, 即得该投影给出的点是 $\dfrac{4}{x_2}$. 连接上方切线的点 -4

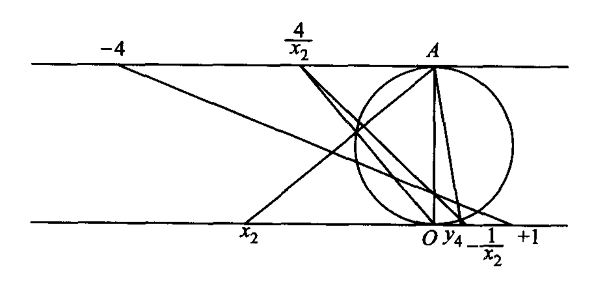


图 7

和下方切线的点 $+1$，所得的直线与直径相交，若把该交点与点 $\frac{4}{x_2}$ 相连接，则该连线在 X 轴上截得的部分就是所要求的 $-\frac{1}{x_2}$. 这个横截线在第一象限内与圆相交. 如果我们从点 A 作该交点到 X 轴的投影，则我们就作出了所要的第三个方程的根 y_4.

最后我们要确定第四个二次方程的根 z_1，为此在上方切线截取 $\frac{4}{y_1}$，在下方切线截取 $\frac{y_4}{y_1}$. 我们用通常的方法来解第一个问题. 连接点 A 和下方切线的点 $+y_1$ 的直线与圆相交，从 O 点作该交点到上方切线的投影，从而得 $\frac{4}{y_1}$. 对于另一部分，我们连接上方切线的点 $+4$ 和下方切线的 y_4，该直线与垂直的直径相交一点，该点与 $\frac{4}{y_1}$ 确定了另一直线，这条直线在 X 轴上截取的部分恰为所要的 $\frac{y_4}{y_1}$. 事实上，直线 a(图 8) 的方程为

$$(y_4-4)y+2x=2y_4\ .$$

它在垂直直径上截取的部分是 $\frac{2y_4}{y_4-4}$. 直线 b 的方程为

$$2y_1x+(y_4-4)y=2y_4\ ,$$

它和 X 轴的交点的横坐标就是 $\frac{y_4}{y_1}$.

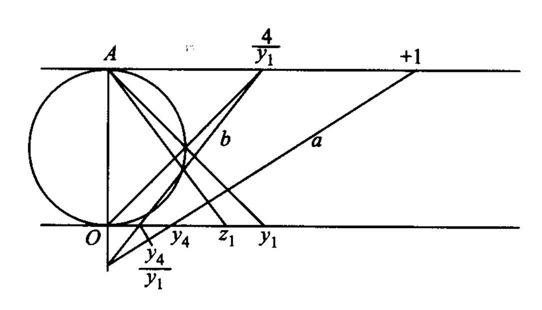


图 8

如果我们从 A 点出发，作直线 b 与圆的交点到 X 轴的投影，则得到 $z_1=2\cos\frac{2\pi}{17}$. 如果我们单单要求余弦本身，则只要再作一条平行于 X 轴的直径，上述最后的投影射线在其上截取的正是 $\cos\frac{2\pi}{17}$. 过该点的垂线 (平行于垂直直径) 在圆上立即给出正 17 边形的第 1 和第 16 个顶点.

周期 z_1 的选取是任意的; 我们可以同样地作图得到其他的每个由两项构成的周期, 并找出相应的余弦值. 为了更易理解, 我们将多个单独的作图图形组合成一个图 (图 9), 它给出了正 17 边形的完整作图.

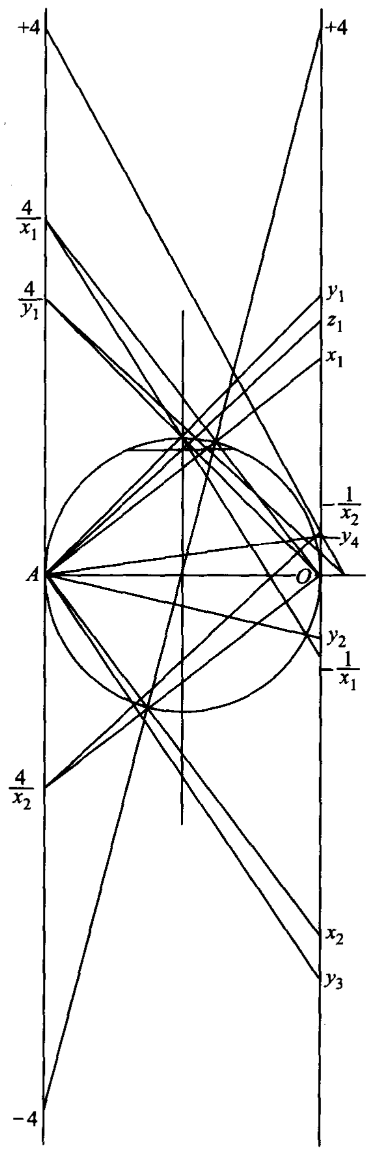


图 9

第五章

代数作图的一般情形

---

1. 现在我们将把尺规作图问题搁置一边. 在结束本课题之前，我们要介绍一种新的非常简单的实现某些作图的方法，即 *折纸*. Hermann Wiener[1] 已经说明了如何用折纸可得正多面体的网架. 惊奇的是, 几乎在同时, 印度的 Madras 的数学家 Sundara Row 出版了一本题为 *Geometrical Exercises in Paper Folding* (Madras, Addison & Co., 1893) 的小册子，其中同样的想法得到了相当的发展. 作者说明了如何用折纸可以逐点地作出像椭圆、蔓叶线等那样的曲线.

2. 让我们探究一下如何在几何上解三次或高次方程的问题，特别要了解一下古人是如何成功解决的. 最自然的方法是古人使用颇多的圆锥曲线方法. 例如，他们发现，用这些曲线可以解决倍立方问题和角的三等分问题. 为更简单起见，这里我们将用现代数学语言给出解过程的一个一般概述.

例如，要求图解三次方程

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0\,,$$

[1]参见 Dyck, *Katalog der Münchener mathematischen Ausstellung von*, 1893, Nachtrag, p. 52.

或四次方程

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\,.$$

令 $x^2 = y$; 我们的方程变为

$$xy + ay + bx + c = 0$$

和

$$y^2 + axy + by + cx + d = 0\,.$$

上述方程的根是两条圆锥曲线的交点的横坐标.

方程

$$x^2 = y$$

表示关于 y 轴的抛物线. 第二个方程

$$xy + ay + bx + c = 0$$

表示双曲线，其渐近线平行于坐标轴 (图 10). 四个交点中的一个位于关于 Y 轴的无穷远处，其他三个都在有限距离内，而它们的横坐标就是三次方程的根.

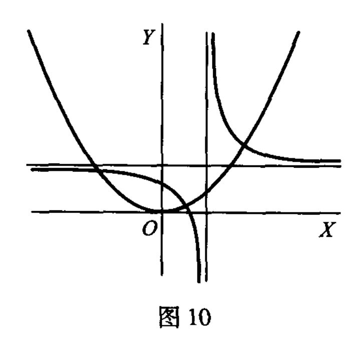


图 10

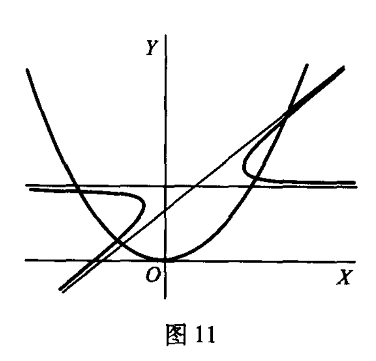


图 11

在第二种情形下，抛物线是一样的. 双曲线 (图 11) 的一条渐近线平行于 X 轴，而另一条不再与 X 轴垂直. 在有限距离内两条曲线有四个交点.

M. Cantor 的精心著作 *Geschichte der Mathematik* (Leipzig, 1894, 2nd ed.) 详细给出了古代数学家所使用的方法. Zeuthen 的著作 *Die Kegelschnitte im Altertum* (Kopenhagen,1886, 德文版) 是特别有趣味的. 作为一般概要，可参考 Baltzer 的书 *Analytische Geometrie* (Leipzig, 1882).

3. 为了解上述问题，古人除了运用圆锥曲线外，还构作了更高次的曲线. 这里我们仅提及 蔓叶线 和 蚌线.

Diocles 的 蔓叶线(公元前 150 年) 可如下作图 (图 12): 作圆的一条切线 (图中为右边的竖直切线，切点为 A), 并作垂直于该切线的直径. 由此确定了圆的另一顶点 O. 引 O 到切线上点的直线，并在每条这样的直线上从 O 截取一段，其长度等于该直线与圆的交点和该直线与切线交点间的距离. 这样确定的端点的轨迹就是 蔓叶线.

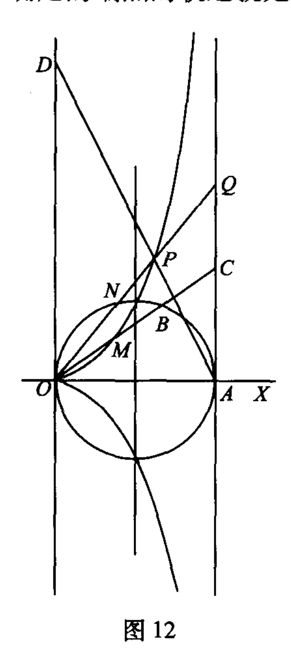


图 12

为导出曲线方程，令 r 是曲线的径矢，θ 是它与 X 轴所成的角. 如果我们将 r 延伸到右边的切线，并令圆的直径为 1, 那么整个线段的总长度为 $\dfrac{1}{\cos\theta}$, 圆所截取部分的长度为 $\cos\theta$. r 是两者之差，因而

$$r = \frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\,.$$

利用坐标变换我们可得笛卡儿方程

$$(x^2 + y^2)x - y^2 = 0\,.$$

这是三次曲线，在原点有一尖点，并关于 X 轴对称. 我们在作图开始时引的圆的垂直切线是它的渐近线. 最后，蔓叶线与切线相交于无穷远圆点 (虚圆点).

为了说明如何用该曲线来解 Delian 问题，我们将上述方程写成如下形式：

$$(\frac{y}{x})^3 = \frac{y}{1-x} .$$

现在作直线

$$\frac{y}{x} = \lambda .$$

它在切线 $x = 1$ 上截取长为 λ 的一段，它与蔓叶线的交点满足

$$\frac{y}{1-x} = \lambda^3 .$$

这是过点 $y = 0, x = 1$ 的一条直线的方程，因而是连接该点与蔓叶线上点的直线的方程.

这直线在 Y 轴上截得交点 λ^3.

现在我们看如何作出 $\sqrt[3]{2}$. 在 Y 轴上截取交点 2, 连接该点与点 $x = 1, y = 0$ 的直线与蔓叶线相交；从原点作过该交点的直线，它在切线 $x = 1$ 上截得的长等于 $\sqrt[3]{2}$.

4. Nicomedes 的蚌线(公元前 150 年) 可如下作图：令 O 为一定点，a 是 O 到一定直线的距离. 如果我们过 O 点作一束射线，在每条射线上，与定直线相交的交点两边截取线段 b, 这样确定的端点的轨迹就是蚌线. 根据 b 大于或小于 a, 原点是曲线的节点或共轭点；对于 $b = a$, 它是一个尖点 (图 13).

过 O 点取与定直线垂直和平行的直线为 X 轴和 Y 轴，我们有

$$\frac{r}{x} = \frac{b}{x-a} ;$$

从而

$$(x^2+y^2)(x-a)^2 - b^2x^2 = 0 .$$

于是，蚌线是四次曲线，原点是一个重点，曲线由两支组成，以直线 $x = a$ 为公共渐近线. 而且，因子 (x^2+y^2) 表明曲线经过无穷远圆点，这相当重要.

利用这条曲线，我们可按下述方式三等分任一角：设 $\varphi = MOY$ 是要三等分的角 (图 13). 在边 OM 上取 $OM = b$, 长度任意. 以 M 为圆心，b 为半径作圆，过 M 作 X 轴的垂线，使其成为待作蚌线的渐近线，再作出蚌线. 连接 O 与蚌线和圆的交点 A. 从图中易见，$\angle AOY$ 是 $\angle\varphi$ 的 $\frac{1}{3}$.

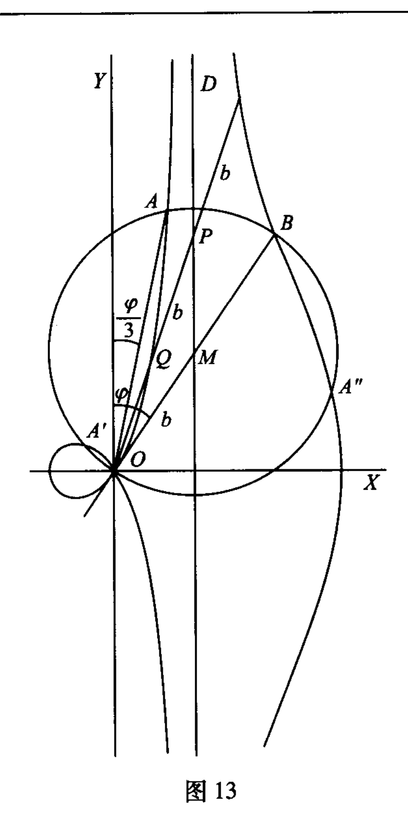


图 13

上述研究已表明，角的三等分问题是一个三次方程问题，它有以下三个解：

$$\frac{\varphi}{3}, \frac{\varphi+2\pi}{3}, \frac{\varphi+4\pi}{3}.$$

显然，借助于高次曲线，解这个问题的每个代数作图必须能给出所有的解. 否则该问题的代数方程将不是不可约. 图 13 显示了这些不同的解. 圆与蚌线相交于八个点，其中两个交点重合于原点，另两个交点是无穷远圆点. 它们都不是原问题的解. 于是还有四个交点，好像多了一个交点. 这是由于在四个交点中，我们必能找到点 B，使得 $OMB=2b$，它可以不借助蚌线而被确定. 所以实际上只剩下三个交点，它们分别对应于由代数解给出的三个根.

5. 在所有这些借助高次代数曲线的几何作图中，我们必须考虑实际的操作. 由于逐点作图仅是一种近似方法，我们需要能连续描绘曲线的工具. 已经制造了几种这类工具，其中某些已为古人所知. Nicomedes 发明了一种描绘蚌线的简单工具. 除了直尺和圆规外，这是一类最古

老的工具了 (Cantor, I, p. 302). 在 Dyck 的 Katalog, pp. 227~230, 340 和 Nachtrag, pp. 42, 43 中可以找到更现代的作图工具的列表.



第二部分

超越数和圆的求积



第一章

超越数存在性的 Cantor 证明

---

1. 通常我们用横坐标轴上的点表示数. 如果我们只考虑有理数, 则相应的点将稠密地充满 (überall dicht) 整个横坐标轴, 即不管在多小的区间上, 都存在无限多个这样的点. 然而, 正如古人就已经发现, 数轴上点的连续统并不能用这种方式来穷竭; 有理数之间夹入着无理数. 由此产生的问题是, 对无理数是否还可作出某种区分?

首先让我们定义什么叫 *代数数*. 整系数代数方程

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\omega + a_n = 0$$

的每个根都称作代数数. 当然, 我们只考虑实根. 作为一种特殊情形, 有理数则出现在形如 $a_0\omega + a_1 = 0$ 的方程中.

现在我们要问: 全体实代数数, 形成一个连续统, 还是形成一个其间可插入其他数的离散序列? 于是, 这些所谓 *超越数* 的新数就可用这样的性质来特征: 它们不可能是任何整系数代数方程的根.

这个问题最早由 Liouville 回答 (*Comptes rendus*, 1844, 以及 Liouville's *Journal*, Vol. XVI, 1851), 事实上他证明了超越数的存在性. 但他的证明建立在连分式的理论上, 相当复杂. 利用 G. Cantor 在一个重要研究报告中 (*Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes reeller algebraischer Zahlen* (Crelle's *Journal*, Vol. LXXVII, 1873)) 给出的进展, 问题的研究

显著地被简化了. 我们将用更简单的观念给出 G. Cantor 的证明, 这些观念是 1891 年他在 Halle 举行的自然科学家大会上以不同的形式提出的.

2. 证明是根据以下事实, 即 (实) 代数数形成一个 *可数集*, 而超越数不是. 据此, G. Cantor 说明了代数数可以按一定次序排列, 使得每个数占据一个确定的位置, 譬如说, 给予编号. 这个命题可叙述如下:

实代数数集与正整数集可建立一一对应.

这里似乎有矛盾. 正整数仅是代数数的一部分, 因为前者的每个数都属于后者; 部分将等于全体! 这个谬论是依据一个错误的类比. 对于无限集来说, 部分总小于全体的这样命题是不对的. 例如, 我们显然可在非负整数集与非负偶数集之间建立如下的一一对应:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ 0 & 2 & 4 & 6 & \cdots & 2n & \cdots. \end{array}$$

当处理无限集时, "大于" 和 "小于" 这类词不再适用. 作为一种代替, G. Cantor 引入了 *势* (Mächtigkeit) 这个词, 并说: *两个无限集有相同的势, 当且仅当它们之间可建立一一对应.* 于是, 我们要证明的定理可写成如下形式: *实代数数集与正整数集有相同的势.*

通过寻找一切形如下式的代数方程的实根:

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\omega + a_n = 0,$$

其中 $\{a_i\}$ 互素, a_0 为正, 且方程是不可约的, 我们就可得到实代数数集. 为了给如此得到的数安排确定的次序, 我们考虑它们的 *高度* $\boldsymbol{N}$, 它定义为:

$$\boldsymbol{N} = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|,$$

其中 $|a_i|$ 表示 a_i 的绝对值. 对于给定的一个 $\boldsymbol{N}$, 它只对应有限多个代数方程. 这是因为 $\boldsymbol{N}$ 等于 $n-1$ 加上正数, 故当 $\boldsymbol{N}$ 给定时, n 显然有上界; 而且, $\boldsymbol{N} - (n-1)$ 是若干互素的正数之和, 这个数显然是有限的.

N	n	$\|a_0\|$	$\|a_1\|$	$\|a_2\|$	$\|a_3\|$	$\|a_4\|$	方程	$\phi(N)$	根
1	1	1	0				$x=0$	1	0
	2	0	0	0			–		
2	1	2	0				–	2	-1
		1	1				$x\pm 1=0$		$+1$
	2	1	0	0			–		
3	1	3	0				–	4	-2
		2	1				$2x\pm 1=0$		$-\frac{1}{2}$
		1	2				$x\pm 2=0$		$+\frac{1}{2}$
	2	2	0	0			–		$+2$
		1	1	0			–		
		1	0	1			–		
	3	1	0	0	0		–		
4	1	4	0				–	12	-3
		3	1				$3x\pm 1=0$		-1.61803
		2	2				–		-1.41421
		1	3				$x\pm 3=0$		-0.70711
	2	3	0	0			–		-0.61803
		2	1	0			–		-0.33333
		2	0	1			$2x^2-1=0$		$+0.33333$
		1	2	0			–		$+0.61803$
		1	1	1			$x^2\pm x-1=0$		$+0.70711$
		1	0	2			$x^2-2=0$		$+1.41421$
	3	2	0	0	0		–		$+1.61803$
		1	1	0	0		–		$+3$
		1	0	1	0		–		
		1	0	0	1		–		
	4	1	0	0	0	0	–		

在这些方程中, 我们必须除去那些可约的方程, 这不会出现理论困难. 因为与 N 的一个给定值相对应的方程个数是有限的, 故相应地也只有有限多个代数数. 我们将用 $\phi(N)$ 来记这个数. 表中包含了 $\phi(1), \phi(2), \phi(3), \phi(4)$ 的值及相应的代数数 ω.

现在, 根据它们的高度 N 和对应于同一 N 的那些数的递增顺序, 我们可把这些代数数排列起来. 这样, 我们就得到了所有的代数数, 每一个都在一个确定的位置上. 上表中最后一列就是这样给出的. 所

以，代数数显然是可数的.

3. 现在我们叙述一般的命题：

在横坐标轴的任一小段（不论多么小）上，总有无限多个不属于给定可数集的点.

或换言之：

由横坐标轴上一小段（不论多么小）所表示的数值的连续统，其势大于任何给定的可数集的势.

这相当于肯定了超越数的存在性. 把代数数集取为可数集就足够了.

为证明这个定理，我们先制作一张像上表那样的代数数表，其中所有的代数数以十进小数形式表示. 没有一个数是会以 9 的无限序列结尾；因为等式

$$1 = 0.999\cdots9\cdots$$

表明这样的数是个完整的十进数. 如果我们能构造一个十进小数，它在我们的表上找不到，且不以 9 的无限数列结尾，则这个数必定是个超越数. 利用 G. Cantor 指出的简单办法，我们不仅能找出一个，而且能找出无穷多个超越数，即使是在一个非常小的区间内. 例如，假设一个超越数的前五位小数已被给定， G. Cantor 的办法如下.

它的第六位小数取为非 9 的且与 *第一个代数数* 的第六位小数不同的数；第七位小数取为非 9 的且与 *第二个代数数* 的第七位小数不同的数；如此类推. 用这种办法，我们就得到一个十进小数，它不以 9 的无限数列结尾，也不包含在我们的表中. 这样，命题就被证明了.

由此可见，超越数（如果表达式是许可的）远比代数数要多. 因为当我们确定一个未知的小数时，除了 9 外，可以从 8 个不同的数中进行选择；因此我们可以作成 8^{∞} 个超越数，甚至我们可使它们位于任意小的区间内.

第二章

关于 π 的计算和作图的历史概观

在下一章我们将证明 π 属于超越数集，其中超越数的存在性在上一章已有说明. Lindemann 于 1882 年首先给出了证明，使得圆的求积问题被彻底解决，据我们所知，该问题占据了数学家们将近 4000 年的注意力.

如果 π 不是代数数，它当然不能由尺规作图得到. 因此早期人们所理解的圆的求积是不可能的. 回顾一下这个问题在自然科学的不同发展时期的命运是一件非常有意义的事. 当我们找到尺规作图的新方法时，虽然它们对问题的求解毫无作用，但是却推动了数学领域中流形的发展.

以下简要的历史回顾是基于 Rudio 的杰出工作： *Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre, Vier Abhandlungen über die Kreismessung*, Leipzig, 1892. 这本著作含有所列作者的一些研究内容的德文翻译. 虽然这本书的表述方式并不像我们现在讨论的现代方法，但它涵盖了很多在基础教育中很多有意思的细节描述，很有实用价值.

1. 在试图确定直径与圆周比例的过程中，我们首先要与经验时期相区别，在经验时期，人们采取测量或直接估计的方法来得到最后的结果.

最古老的数学名著之一的 the Rhind Papyus(公元前 1650 年) 收录了该问题的经典形式：化圆为方．作者给出了如下方法：去掉直径的 $\frac{1}{9}$，以直径的剩余部分为边作一个正方形，它的面积与圆相等．这样得到的 π 值就应为 $\left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3.16\cdots$，这个结果并不是十分的不准确．更粗略的 π 值是圣经 (1 Kings, 7.23, 2 Chronicles, 4.2) 中引用的 $\pi = 3$.

2. 希腊人发展了这种近似观点，特别是 Archimedes, 在他的著作 *κύκλου μέτρησις* 中，他借助于内接和外接多边形来计算圆面积，至今有很多学校仍然在这样做．他的这种方法在微积分发明之前一直被广泛使用；特别地， Huygens(1654 年) 在他的著作 *De circuli magnitudine inventa* 中对这种方法作了改进，使其更为实用．

正如在倍立方问题和角的三等分问题中的情形，希腊人借助于高次曲线，也实现了圆的求积.[1]

例如，考虑曲线 $y = \sin^{-1}(x)$，它表示直角坐标系中的正弦曲线．从几何上看， π 表现为曲线上一个较特殊点的坐标值．从函数观点看，π 是超越函数的一个特别的函数值．我们称任何能描绘超越曲线的仪器为超越仪器．能够绘制正弦曲线的超越仪器当然可以给出 π 的几何作图．

用现代数学语言，曲线 $y = \sin^{-1}(x)$ 被称为*积分曲线*，因为它可以由一个函数的积分来定义：

$$y = \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

前人称上述曲线为*割圆曲线*，或 *τετραγωνίζουσα*. 最著名的割圆曲线是 *Dinostratus* *割圆曲线*(公元前 350 年)，然而 Elis 城的 Hippias(公元前 420 年) 在研究角的三等分时已构作出该曲线．几何上可以如下定义该曲线：给定一个圆和两条相互垂直的半径 OA, OB，位于半径 OB 上的点 M 和弧 AB 上的点 L 作匀速运动 (图 14). 如果两点分别从 O 点和 A 点开始运动，它们将同时到达 B 点．过点 M 且与 OA 平行的直线交 OL 于 P, P 点的轨迹就是割圆曲线．

从曲线的定义可知 y 与 θ 成比例．并且，由于当 $y = 1$ 时， $\theta = \frac{\pi}{2}$，

[1]我国魏晋时期数学家刘徽得出 $\pi = 157/50 = 3\cdot 14$(约公元 263 年)，俗称*徽率*；南北朝期数学家祖冲之得出 $\pi = 355/113 \approx 3\cdot 1415926$(约公元 470 年)，俗称*祖率*.——中译者注

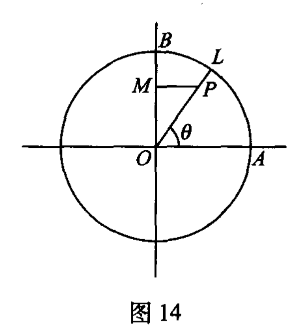


图 14

我们有:

$$\theta = \frac{\pi}{2}y\,;$$

结合 $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$, 曲线的方程成为:

$$\frac{y}{x} = \tan\frac{\pi}{2}y\,.$$

它与 X 轴的交点坐标为:

$$x = \lim\frac{y}{\tan\frac{\pi}{2}y},\quad y = 0\,;$$

从而,

$$x = \frac{2}{\pi}\,.$$

根据这个公式, 圆的半径就是 $\frac{1}{4}$ 圆周与割圆曲线同 X 轴交点的横坐标比例的平均值, 因此该曲线可用于圆周求长以及圆的求积问题. 由于我们还没有能连续绘制割圆曲线的工具, 它的这种用途恰能说明求长问题的几何公式.

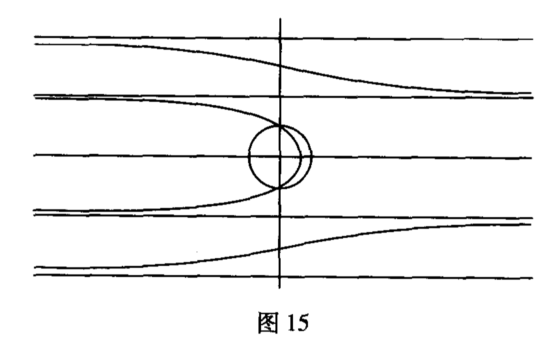


图 15

取 $\theta > \pi$ 或 $\theta < -\pi$, 由这样给出的两个曲线分支可以构作割圆曲线, 图 15 给出的正是这种想法. 显然 Dinostratus 的割圆曲线并不如曲线 $y = \sin^{-1} x$ 来得方便, 但是前人似乎并没有采用后者.

3. 在 1670 年至 1770 年间, 以 Leibnitz, Newton, Euler 为代表的一批数学家已经看到了现代分析学的发展. 几乎在连续不断的状态下, 重大的发现层出不穷, 而评论的严格性却没有受到应有的重视, 也许这也是自然的. 对于我们的讨论, 级数理论的发展尤为重要. 有大量计算 π 近似值的方法由此而来. 这里我们要提到所谓的 Leibnitz 级数(然而在 Leibnitz 之前它已为人们所知):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

同一时期, π 和 e 的相互依存关系也被发现. Napier(1614) 的著作中首次记载了自然对数 e 和指数函数. 在 Euler 勇敢地运用指数的虚数次幂之前, 起初 e 与圆周函数和 π 之间似乎并没有什么关系. Euler 用他的方法得到了以下著名公式:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x ,$$

当取 $x = \pi$ 时, 有

$$e^{i\pi} = -1.$$

这个公式自然地成为数学领域中最漂亮的公式之一. 现代数学关于 π 为超越性的证明中, 第一步总是先证明 e 的超越性, 因而是完全建立在该公式的基础上的.

4. 自 1770 年后, 评论的严格性渐渐开始恢复了它的公正地位. 今年 Lambert 发表了著作: *Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur ⋯ des Cirkuls suchen.* 在其他材料中讨论了 π 的无理性. 1794 年 Legendre 在著作 *Éléments de Géométrie* 中总结性地证明了 π 和 π^2 是无理数.

5. 但整整过去了一个世纪, 人们才开始用现代的观点来重新研究这个问题. 起始点是 Hermite 的著作 *Sur la fonction exponenticlle* (*Comptes rendus*, 分别于 1873 年和 1874 年出版). e 的超越性也在那里证明了.

Lindemann 对 π 的超越性给出了一个同 Hermite 的工作有着密切联系的类似证明: *Ueber die Zahl π* (*Mathematische Annalen*, XX, 1882. 也可参见 Berlin 和 Paris 高等研究院的学报).

至此，这个问题终于被首次解决了；但 Hermite 和 Lindemann 的研究工作仍然十分复杂.

Weierstrass 在 1885 年的 *Berliner Berichte* 中给出了第一个简化证明. 前面提到的这些工作被 Bachmann 收录在他编的教科书中， *Vorlesungen über die Natur der Irrationlzahlen*, 1892.

但是 1893 年春天，一个崭新的极为重要的简化证明出现了. 首先要提到的是 Hilbert 在 *Göttinger Nachrichten* 中发表的论文集. 仍然，Hilbert 的证明并不是完全初等的，在应用积分

$$\int_0^\infty z^\rho e^{-z} dz = \rho!$$

时还留有 Hermite 证明的痕迹. 但不久 Hurwitz 和 Gordan 证明这个超越公式可以不用 (*Göttinger Nachrichten; Comptes rendus*; 这三篇论文都在 *Mathematische Annalen*, Vol. XLIII 上重载，并有某些扩展).

现在我们所取的证明形式是如此的初等，一般而言，这似乎是有效的. 我们基本上将遵循 Gordan 的处理模式.

第三章

数 e 的超越性

1. 我们取熟知的级数

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

作为我们研究的出发点. 对于 x 的一切有限值, 这个级数都是收敛的. 这里需要强调的是实用上收敛性和理论上收敛性的差别. 假设 $x = 1000$, 那么用这种级数来计算 e^{1000} 显然是不可取的. 但在理论上这个级数却肯定是收敛的, 因为我们易见, 在级数的 1000 项之后, 分母中 $n!$ 的增长速度比分子中的乘幂要快得多. 对于 x 的任何有限值, 当 n 趋于无穷大时, $\frac{x^n}{n!}$ 的极限是零. 这一情况对我们后面的论证有重要意义.

现在我们要建立以下的命题:

e 不是代数数, 即如下形式的整系数方程

$$F(e) = C_0 + C_1 e + C_2 e^2 + \cdots + C_n e^n = 0$$

不成立. 系数 C_i 可以假定是互素的.

我们将用反证法, 即假设上述方程成立, 则将会导致一个谬论. 这个谬论可按如下方法得出: 在方程 $F(e) = 0$ 两边同乘以一 (非零) 整数 M, 从而

$$MF(e) = MC_0 + MC_1 e + MC_2 e^2 + \cdots + MC_n e^n = 0.$$

我们将证明，可以适当地选择 M, 使得

(1)$M\mathrm{e}, M\mathrm{e}^2, \cdots, M\mathrm{e}^n$ 的每一个都可以分解为整数部分 M_k 和小数部分 ε_k, 从而上述方程具有下如形式:

$$MF(\mathrm{e}) = MC_0 + M_1C_1 + M_2C_2 + \cdots + M_nC_n + C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2 + \cdots + C_n\varepsilon_n = 0\,;$$

(2) 整数部分

$$MC_0 + M_1C_1 + M_2C_2 + \cdots + M_nC_n$$

非零. 这将是下述事实的结果：该式除以一素数后所得余数非零;

(3) 可以按我们的需要使表达式

$$C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2 + \cdots + C_n\varepsilon_n$$

成为一个充分小的小数.

因为整数部分之和非零，加上一适当小数后，其和必不为零. 所以，当以上条件满足时，所假设的方程显然是不可能成立的.

证明的要点可以叙述如下 (尽管不十分准确)：

在具有非常小的误差下，我们可以假设 $\mathrm{e}, \mathrm{e}^2, \cdots, \mathrm{e}^n$ 与某些整数成比例，而这些整数并不满足我们所假设的方程.

2. 在证明中我们将使用一个符号 h^r 和一个多项式 $\phi(x)$.

符号 h^r 仅仅是阶乘 $r!$ 的另一种记法. 从而，我们可以将 e^x 的级数写成如下形式:

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{h} + \frac{x^2}{h^2} + \cdots + \frac{x^n}{h^n} + \cdots$$

这个符号没有其他更深刻的含义，只是使我们能把含有乘幂和阶乘的每一个公式写成更紧凑的形式.

例如，假设已给一个展开的多项式:

$$f(x) = \sum_r c_r x^r\ .$$

那么，和式

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 2! + c_3 \cdot 3! + \cdots + c_n \cdot n!$$

可写成 $\sum_r c_r h^r$, 并用 $f(h)$ 表示之.

但如果 $f(x)$ 是未展开的，那么要计算 $f(h)$, 就先要将该多项式展开成关于 h 的幂级数，最后用 $r!$ 代替 h^r. 例如,

$$f(k+h)=\sum_r c_r(k+h)^r=\sum_r {c'}_r\cdot h^r=\sum_r {c'}_r\cdot r!,$$

其中 ${c'}_r$ 与 k 有关.

我们证明所需要的多项式 $\phi(x)$ 是下面的特殊表达式:

$$\phi(x)=x^{p-1}\frac{[(1-x)(2-x)\cdots(n-x)]^p}{(p-1)!},$$

其中 p 是一个素数， n 表示 e 所满足的假设的代数方程的次数. 我们将假设 p 大于 n 和 $|C_0|$, 并且稍后将使 p 无限增大.

为了得到多项式 $\phi(x)$ 的几何图形，我们作曲线:

$$y=\phi(x).$$

在 $x=1,2,\cdots,n$ 这些点，曲线以 x 轴作为其拐点处的切向，因为它与 x 轴相交奇数次. 在原点， x 轴仍是切向，但该点不是拐点. 对于 0 和 n 之间的 x 值，曲线位于 x 轴的某个领域内；对于更大的 x 值，曲线将远离 x 轴。

现在我们要建立函数 $\phi(x)$ 的三个重要性质:

(1) 设 x 给定， p 无限增大，则 $\phi(x)$ 趋于零， $\phi(x)$ 的各项绝对值之和也趋于零.

令 $u=x(1-x)(2-x)\cdots(n-x)$; $\phi(x)$ 可写为

$$\phi(x)=\frac{u^{p-1}}{(p-1)!}\frac{u}{x},$$

当 p 无限增大时 $\phi(x)$ 趋于零.

在 $\phi(x)$ 的未展开式中用 $|x|$ 代换 $-x$, 就得到 $\phi(x)$ 的各项绝对值之和. 于是，第二部分的证明就像第一部分的一样.

(2) 设 h 是一个整数，则 $\phi(h)$ 是一个不能被 p 整除的整数，因而不是零.

将 $\phi(x)$ 按 x 的升幂展开，注意到最低和最高次项的次数分别为 $p-1$ 和 $np+p-1$, 我们有

$$\phi(x)=\sum_{r=p-1}^{np+p-1} c_r x^r=\frac{c' x^{p-1}}{(p-1)!}+\frac{c'' x^p}{(p-1)!}+\cdots\pm\frac{x^{np+p-1}}{(p-1)!}.$$

因此，

$$\phi(h)=\sum_{r=p-1}^{np+p-1} c_r h^r\,.$$

不计各项中都出现的分母 $(p-1)!$, 系数 c_r 都是整数. 只要我们将 h^r 替换成 $r!$, 分母 $(p-1)!$ 都将消失，因为最低次的阶乘是 $h^{p-1}=(p-1)!$. 展开式中自第一项后的所有项都含有因子 p. 第一项可以写成：

$$\frac{(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \cdots\ \cdot n)^p\cdot(p-1)!}{(p-1)!}=(n!)^p,$$

既然 $p>n$, 它当然不能被 p 整除.

因此，

$$\phi(h)\equiv(n!)^p(\text{mod.}\ p),$$

所以，

$$\phi(h)\neq 0\,.$$

此外，$\phi(h)$ 是个非常大的数；就是它的最后一项也非常大，即：

$$\frac{(np+p-1)!}{(p-1)!}=p(p+1)\cdots(np+p-1).$$

(3) 设 h 为一整数，k 是数 $1,2,\cdots,n$ 之一，则 $\phi(h+k)$ 是一个能被 p 整除的整数.

我们有

$$\phi(h+k)=\sum_r c_r(h+k)^r=\sum_r c'_r h^r,$$

仅当展开式按 h 的升幂排列后，我们才可在公式中用 $r!$ 代换 h^r.

根据符号运算的规则，首先我们有

$$\phi(h+k)=(h+k)^{p-1}\frac{[(1-k-h)(2-k-h)\cdots(-h)\cdots(n-k-h)]^p}{(p-1)!}$$

方括号中有一个因子化成了 $-h$; 从而在 h 的展开式中最低次项是 p 次的. 于是，我们可写出

$$\phi(h+k)=\sum_{r=p}^{np+p-1} c'_r h^r.$$

这里系数仍是以 $(p-1)!$ 为分母，分子是整数的分数. 正像前面已说明那样，当我们用 $r!$ 代换 h^r 后分母就消失了. 但现在展开式的每一项都可被 p 整除；因为第一项可写为

$$\frac{(-1)^{kp}\cdot k^{p-1}[(k-1)!(n-k)!]^p\cdot p!}{(p-1)!}=(-1)^{kp}k^{p-1}[(k-1)!\cdot(n-k)!]^p\cdot p,$$

因此 $\phi(h+k)$ 可以被 p 整除.

3. 现在我们可以证明，方程

$$F(\mathrm{e})=C_0+C_1\mathrm{e}+C_2\mathrm{e}^2+\cdots+C_n\mathrm{e}^n=0$$

不可能成立.

我们选取 $M=\phi(h)$, 把它乘方程的各项，从而

$$\phi(h)F(\mathrm{e})=C_0\phi(h)+C_1\phi(h)\mathrm{e}+C_2\phi(h)\mathrm{e}^2+\cdots+C_n\phi(h)\mathrm{e}^n.$$

试将其中任一项，如 $C_k\phi(h)\mathrm{e}^k$, 分解为整数部分和小数部分之和. 我们有

$$\mathrm{e}^k\cdot\phi(h)=\mathrm{e}^k\sum_r c_r h^r.$$

考虑到 e^k 的级数展开，忽略常系数，这和式的任一项具有如下形式：

$$\mathrm{e}^k\cdot h^r=h^r+\frac{h^r\cdot k}{1}+\frac{h^r\cdot k^2}{2!}+\cdots+\frac{h^r\cdot k^r}{r!}+\frac{h^r\cdot k^{r+1}}{(r+1)!}+\cdots.$$

用 $r!$ 或下列量之一代替 h^r:

$$rh^{r-1},r(r-1)h^{r-2},\cdots,r(r-1)\cdots3h^2,r(r-1)\cdots2\cdot h,$$

并且简化每个分式，得

$$\mathrm{e}^k\cdot h^r=h^r+\frac{r}{1}h^{r-1}k+\frac{r(r-1)}{2!}h^{r-2}k^2+\cdots+\frac{r}{1}hk^{r-1}+k^r$$
$$+k^r[\frac{k}{r+1}+\frac{k^2}{(r+1)(r+2)}+\cdots].$$

上面第一行与 $(h+k)^r$ 有相同的展开式；第二行的方括号是下列级数

$$0+\frac{k}{r+1}+\frac{k^2}{(r+1)(r+2)}+\cdots,$$

它的每一项都分别小于下列级数中的对应项：

$$\mathrm{e}^k = 1 + k + \frac{k^2}{2!} + \frac{k^3}{3!} + \cdots.$$

因此 $\mathrm{e}^k \cdot h^r$ 的展开式中的第二行可以表达成如下形式：

$$q_{r,k}\mathrm{e}^k \cdot k^r,$$

其中 $q_{r,k}$ 是一个适当的分数.

把和式

$$\mathrm{e}^k \sum c_r h^r$$

中的每一项都作同样的分解，则它就取如下形式：

$$\mathrm{e}^k \sum_r c_r h^r = \sum_r c_r (h+k)^r + \mathrm{e}^k \sum_r q_{r,k} c_r k^r.$$

这和式的第一部分就是 $\phi(h+k)$; 它是一个能被 p 整除的数 (见 (2), (3)). 进一步，由 (2) 与 (1), 当 p 趋于无穷大时,

$$\phi(k) = \sum_r |c_r k^r|$$

趋于零， $\sum\limits_r q_{r,k} c_r k^r$ 也有同样的性质；并且因 e^k 是个有限量，故 $\mathrm{e}^k \sum\limits_r q_{r,k} c_r k^r$ 也趋于零 (当 p 趋于无穷大时), 我们可用 ε_k 表示它.

这样，所考虑的项 $C_k \mathrm{e}^k \phi(h)$ 已被作成了一个整数 $C_k \phi(h+k)$ 和一个量 $C_k \varepsilon_k$ 之和的形式，只要适当选择 p, 就可使 $C_k \varepsilon_k$ 充分小.、

对所有项作同样的处理，最终我们得到

$$\begin{aligned} F(\mathrm{e})\phi(h) = C_0\phi(h) &+ C_1\phi(h+1) + \cdots + C_n\phi(h+n) \\ &+ C_1\varepsilon_1 + C_2\varepsilon_2 + \cdots + C_n\varepsilon_n \end{aligned}$$

现在就容易完成证明了. 第一行中第一项以后的每项都能被 p 整除. 对于第一项， $|C_0|$ 的值小于 p, $\phi(h)$ 不能被 p 整除；从而 $C_0\phi(h)$ 不能被素数 p 整除. 因此，第一行的各项之和不是零.

第二行的项数是有限的；只要适当选择 p, 它的任一项都可以小于任何给定的数；因此，它们的和亦然.

因为一个非零整数和一个小数之和不可能为零，故所假设的方程不可能成立.

这样， e 的超越性，或 Hermite 定理，就被证明了.

第四章

数 π 的超越性

1. Lindemann 给出的 π 的超越性证明是 e 为超越数的 Hermite 证明的拓广. Hermite 证明了不存在如下形式

$$C_0 + C_1 \mathrm{e} + C_2 \mathrm{e}^2 + \cdots + C_n \mathrm{e}^n = 0$$

的整系数方程; 而 Lindemann 推广了这一点, 他用下列和式:

$$\mathrm{e}^{k_1} + \mathrm{e}^{k_2} + \cdots + \mathrm{e}^{k_N}$$

$$\mathrm{e}^{l_1} + \mathrm{e}^{l_2} + \cdots + \mathrm{e}^{l_{N'}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

代替 $\mathrm{e}, \mathrm{e}^2, \cdots$, 其中诸 k_i 是相关的代数数, 也就是一个 N 次整系数代数方程的根; 诸 l_i 是一个 N' 次整系数代数方程的根; 如此等等. 而且, 这些根的部分或全体可以是虚数.

Lindemann 的一般定理可叙述如下:

数 e 不可能满足如下形状:

$$(1) \qquad \begin{aligned} C_0 &+ C_1(\mathrm{e}^{k_1} + \mathrm{e}^{k_2} + \cdots + \mathrm{e}^{k_N}) \\ &+ C_2(\mathrm{e}^{l_1} + \mathrm{e}^{l_2} + \cdots + \mathrm{e}^{l_{N'}}) + \cdots = 0 \end{aligned}$$

的方程，其中系数 C_i 是整数，指数 $k_i, l_i, \cdots$ 分别是相应的代数数.

定理也可叙述为：

数 e 不仅不是一个代数数 (因而是超越数)；而且还不是半超越 (interscendental)数,[1] 因此是高阶超越数.

设

$$ax^N + a_1x^{N-1} + \cdots + a_N = 0$$

是以指数 k_i 为根的方程；设

$$bx^{N'} + b_1x^{N'-1} + \cdots + b_{N'} = 0$$

是以指数 l_i 为根的方程；如此等等. 这些方程不一定是不可约的，其首项系数也不一定为 1. 因此，在我们后面讨论中出现的那些根的对称函数也不一定是整数.

为了得到整数，只要考虑下列量的对称函数：

$$ak_1, ak_2, \cdots, ak_N,$$

$$bl_1, bl_2, \cdots, bl_{N'},$$

如此等等. 这些数是下列方程的根：

$$y^N + a_1y^{N-1} + a_2ay^{N-2} + \cdots + a_Na^{N-1} = 0,$$

$$y^{N'} + b_1y^{N'-1} + b_2by^{N'-2} + \cdots + b_{N'}b^{N'-1} = 0,$$

如此等等. 这些量是相关的整代数数，它们的有理对称函数是实整数.

现在我们将仿效 Hermite 的定理证明过程.

假定方程 (1) 成立，两边乘以一个整数 M；然后把每个形如

$$M(e^{k_1} + e^{k_2} + \cdots + e^{k_N})$$

的和式分解成整数部分与分数部分之和，即

$$M(e^{k_1} + e^{k_2} + \cdots + e^{k_N}) = M_1 + \epsilon_1,$$

$$M(e^{l_1} + e^{l_2} + \cdots + e^{l_{N'}}) = M_2 + \epsilon_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

[1] Leibnitz 称函数 x^λ 为半超越 (interscendental) 函数，其中 λ 为代数无理数.

于是方程 (1) 就变为

$$C_0M + C_1M_1 + C_2M_2 + \cdots + C_1\epsilon_1 + C_2\epsilon_2 + \cdots = 0.$$

我们要证明适当地选择 M, 可使第一行的数之和是一个不能被某个素数 p 整除的整数，因此不可能为零；而分数部分可以任意小，这样我们就能推出像前面 (上一章) 一样的矛盾。

2. 我们将再次使用符号 $h^r = r!$, 选择量 $M = \psi(h)$ 作为乘数，$\psi(x)$ 是上一章用过的 $\phi(x)$ 的推广，定义如下：

$$\psi(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}[(k_1 - x)(k_2 - x)\cdots(k_N - x)]^p \cdot a^{Np} \cdot a^{N'p} \cdot a^{N''p} \cdots$$
$$\cdot [(l_1 - x)(l_2 - x)\cdots(l_{N'} - x)]^p \cdot b^{Np} \cdot b^{N'p} \cdot b^{N''p} \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

其中 p 是一个大于下列任一数的绝对值的素数：

$$C_0, a, b, \cdots, a_N, b_{N'}, \cdots,$$

稍后将假定 p 无限增大. 至于因子 $a^{Np}, b^{N'p}, \cdots$, 引入它们是为了使 $\psi(x)$ 的展开式中含有下列量的对称函数：

$$ak_1, ak_2, \cdots, ak_N,$$

$$bl_1, bl_2, \cdots, bl_{N'},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

这些对称函数是有理整数. 稍后我们将要把下列表达式展开：

$$\sum_\nu \psi(k_\nu + h), \quad \sum_\nu \psi(l_\nu + h), \quad \cdots.$$

如果我们希望这些展开式的系数是能被 $(p-1)!$ 整除的整数，那么就必然要出现这些相同因子.

(1) $\psi(h)$ 是一个不能被 p 整除的整数，因而不是零.

将 $\psi(h)$ 按 h 的升幂排列，它就成为：

$$\psi(h) = \sum_{r=p-1}^{Np+N'p+\cdots+p-1} c_r h^r.$$

在这个展开式中，所有系数的分子都是整数，并且有公分母 $(p-1)!$.

第一项 h^{p-1} 的系数可以写成：

$$\frac{1}{(p-1)!}(ak_1 \cdot ak_2 \cdot \cdots \cdot ak_N)^p a^{N'p} a^{N''p} \cdots$$
$$(bl_1 \cdot bl_2 \cdot \cdots \cdot blN')^p b^{Np} b^{N''p} \cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$= \frac{1}{(p-1)!}(-1)^{Np+N'p+\cdots}(a_N a^{N-1})^p a^{N'p} a^{N''p} \cdots$$
$$(b_{N'} b^{N'-1})^p b^{Np} b^{N''p} \cdots.$$

如果在这一项中我们用 h^{p-1} 的值 $(p-1)!$ 来代替它，则分母便消失了. 根据对素数 p 所作的假定，乘积的每个因子都不能被 p 整除，因而整个乘积也不能被 p 整除.

当我们用 $p!$ 代替 h^p 时，则第二项 $C_p h^p$ 同样也是整数，但保留了因子 p, 后面的其他项也如此类推. 因此，$\psi(h)$ 是一个不能被 p 整除的整数.

(2) *对于给定的有限量 x, 当 p 无限增大时，$\psi(x) = \sum_r C_r x^r$ 趋于零，从而和式 $\sum_r |C_r x^r|$ 亦然.*

我们可以写

$$\psi(x) = \sum_r C_r x^r$$
$$= \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}[a^N a^{N'} \cdots b^N b^{N'} \cdots (k_1 - x)(k_2 - x)\cdots(k_N - x)$$
$$(l_1 - x)(l_2 - x)\cdots(l_{N'} - x)\cdots]^p.$$

因为对于给定的 x 值，方括号内的表达式是一个常数，所以我们可以用 K 来代替它. 于是我们有

$$\psi(x) = \frac{(xK)^{p-1}}{(p-1)!}K,$$

当 p 无限增大时，这个量趋于零. 同理，当 $\psi(x)$ 的每一项用其绝对值代替时，同样结论也真.

(3) *表达式 $\sum_{\nu=1}^{N} \psi(k_\nu + h)$ 是一个可以被 p 整除的整数.*

我们有

$$\psi(k_\nu+h)=\frac{a^p(k_\nu+h)^{p-1}}{(p-1)!}b^{Np}b^{N''p}\cdots$$
$$\cdot\, a^{(N-1)p}[(k_1-k_\nu-h)(k_2-k_\nu-h)\cdots(-h)\cdots(k_N-k_\nu-h)]^p$$
$$\cdot\, a^{N'p}b^{N'p}[(l_1-k_\nu-h)(l_2-k_\nu-h)\cdots(l_{N'}-k_\nu-h)]^p$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

第二行方括号中表达式的第 ν 个因子是 $-h$, 因而关于 h 的最低次幂的项是 h^p.

因此,

$$\psi(k_\nu+h)=\sum_{r=p}^{Np+N'p+\cdots+p-1}c'_r h^r,$$

从而,

$$\sum_{\nu=1}^{N}\psi(k_\nu+h)=\sum_{r=p}^{Np+N'p+\cdots+p-1}C'_r h^r.$$

这些系数 C'_r 的分子都是有理数并且是整数，因为它们是下列量的整数对称函数:

$$ak_1,ak_2,\cdots,ak_N,$$

$$bl_1,bl_2,\cdots,bl_{N'},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

而这些系数的公分母是 $(p-1)!$.

如果我们用 $r!$ 替代 h^r, 则所有系数的分母都消失了，且每一项都留有因子 p, 因此它们的和是一个能被 p 整除的整数.

类似地，对于

$$\sum_{\nu=1}^{N'}\psi(l_\nu+h)\cdots$$

同理可证. 这样，我们已建立了 $\psi(x)$ 的三个性质，它们类似于 Hermite 的定理证明中的 $\phi(x)$ 的性质.

3. 我们现在回到证明方程

$$(1)\quad C_0+C_1(\mathrm{e}^{k_1}+\mathrm{e}^{k_2}+\cdots+\mathrm{e}^{k_N})+C_2(\mathrm{e}^{l_1}+\mathrm{e}^{l_2}+\cdots+\mathrm{e}^{l_{N'}})+\cdots=0$$

不可能成立. 为此目的, 我们用 $\psi(h)$ 乘方程的两边, 于是得到

$$C_0\psi(h)+C_1[\mathrm{e}^{k_1}\psi(h)+\mathrm{e}^{k_2}\psi(h)+\cdots+\mathrm{e}^{k_N}\psi(h)]+\cdots=0,$$

再把方括号里的每个表达式分解为一个整数和一个小数之和. 这个运算比先前稍长一点, 因为 k 可能是一个形如 $k=k'+\mathrm{i}k''$ 的复数. 我们需要引入 $|k|=+\sqrt{k'^2+k''^2}$.

上面和式中的某一项有如下形状:

$$\mathrm{e}^k\cdot\psi(h)=\mathrm{e}^k\sum_r c_rh^r=\sum_r c_r\cdot\mathrm{e}^k\cdot h^r.$$

前面已经证明乘积 $\mathrm{e}^k\cdot h^r$ 可写为

$$\mathrm{e}^k\cdot h^r=(h+k)^r+k^r\left[\frac{k}{r+1}+\frac{k^2}{(r+1)(r+2)}+\cdots\right].$$

其中级数

$$0+\frac{k}{r+1}+\frac{k^2}{(r+1)(r+2)}+\cdots$$

的每项的绝对值小于下列级数的对应项的绝对值:

$$\mathrm{e}^k=1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{2!}+\cdots.$$

因此

$$\left|\frac{k}{r+1}+\frac{k^2}{(r+1)(r+2)}+\cdots\right|<\mathrm{e}^{|k|},$$

或

$$\frac{k}{r+1}+\frac{k^2}{(r+1)(r+2)}+\cdots=q_{r,k}\mathrm{e}^{|k|},$$

其中 $q_{r,k}$ 是一个模小于 1 的复数.

于是, 我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^k\cdot\psi(h)&=\sum_r c_r\mathrm{e}^kh^r=\sum_r c_r(h+k)^r+\sum_r c_rq_{r,k}k^r\mathrm{e}^{|k|}\\&=\psi(h+k)+\sum_r c_rq_{r,k}k^r\mathrm{e}^{|k|}.\end{aligned}$$

连续地给 k 添以下标 $1,2,\cdots,N$, 并作和, 方程就化为

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{k_1}\psi(h)+\mathrm{e}^{k_2}\psi(h)+\cdots+\mathrm{e}^{k_N}\psi(h)\\&\quad=\sum_{\nu=1}^N\psi(k_\nu+h)+\sum_{\nu=1}^N\{\mathrm{e}^{|k_\nu|}\sum_r c_rk_\nu^rq_{r,k_\nu}\}.\end{aligned}$$

对其他所有和式作同样处理，我们的方程就取如下形状：

$$
\begin{aligned}
(2)\qquad & C_0\psi(h)+C_1\sum_{\nu=1}^{N}\psi(k_\nu+h)+C_2\sum_{\nu=1}^{N'}\psi(l_\nu+h)+\cdots \\
& +C_1\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{r}e^{|k_\nu|}c_r k_\nu^r q_{r,k_\nu}+C_2\sum_{\nu=1}^{N'}\sum_{r}e^{|l_\nu|}c'_r l_\nu^r q_{r,l_\nu}+\cdots=0.
\end{aligned}
$$

由 **2.** 的 (2) 知，只要令 p 充分大，就可以使 $\sum_r |c_r k^r|$ 任意小. 因为 $|q_{r,k}|<1$, 故 $\sum_r c_r k^r q_{r,k}$ 就更如此了. 因此，

$$
\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{r}c_r k_\nu^r q_{r,k}\mathrm{e}^{|k_\nu|}
$$

也可任意小. 因为诸系数 C 的数值与个数都是有限的，只要增大 p 就可以使 (2) 式第二行的和任意小.

(2) 式第一行中第一项后的数都可被 p 整除 (见 **2.**(3)), 但 $C_0\psi(h)$ 不能被 p 整除 (见 **2.**(1)). 因此， (2) 式第一行的诸数之和不能被 p 整除，自然不等于零. 一个整数和一个分数的和不可能为零. 因此方程 (2) 不可能成立，从而方程 (1) 也不可能成立 [2].

4. 现在我们要给出比前述命题更一般的命题，而它的证明是前述命题的一个直接结果. 由于这个道理，我们称它为 Lindemann 推论.

数 e 不可能满足如下形状

$$
(3)\qquad C'_0+C'_1\mathrm{e}^{k_1}+C'_2\mathrm{e}^{l_1}+\cdots=0
$$

的方程，其中这些系数都是整数，而指数 $k_1, l_1, \cdots$ 都是不相关的代数数.

为证明这命题，令 $k_2, k_3, \cdots, k_N$ 是 k_1 所满足的方程的其他根；类似地定义 $l_2, l_3, \cdots, l_{N'}$, 等等. 用相应的根 $k_2, \cdots$ 代替 k_1, 用 $l_2, \cdots$ 代替 l_1, 如此类推，作出所有像 (3) 的左边那样的多项式. 再将这些表达

[2] $C_0=0$ 这种更一般情况的证明可通过乘以一个适当因子而化为这里的情况，或通过适当修改 $\psi(h)$ 而直接得证.

式相乘，我们可得积：

$$\prod_{\alpha,\beta,\cdots}(C_0^{'}+C_1^{'}\mathrm{e}^{k_\alpha}+C_2^{'}\mathrm{e}^{l_\beta}+\cdots)\quad\begin{pmatrix}\alpha=1,2,\cdots,N\\ \beta=1,2,\cdots,N'\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\end{pmatrix}$$
$$=C_0+C_1(\mathrm{e}^{k_1}+\mathrm{e}^{k_2}+\cdots+\mathrm{e}^{k_N})+C_2(\mathrm{e}^{k_1+k_2}+\mathrm{e}^{k_2+k_3}+\cdots)$$
$$+C_3(\mathrm{e}^{k_1+l_1}+\mathrm{e}^{k_1+l_2}+\cdots)+\cdots.$$

每个圆括号中的指数都是由 $k_i, l_i, \cdots$ 对称地作成的，因而是整系数代数方程的根．我们的积就回复到 Lindemann 定理的情况；从而它不可能为零．因此，它的每一个因子都不为零，推论得证．

现在我们可以得出更一般的定理．

数 e 不可能满足如下形状的方程：

$$C_0^{(1)}+C_1^{(1)}\mathrm{e}^k+C_2^{(1)}\mathrm{e}^l+\cdots=0,$$

其中系数和指数都是不相关的代数数．

对每个表达式 $C_i^{(1)}$，如果用相应的代数数

$$C_i^{(2)}, C_i^{(3)}, \cdots, C_i^{(N)}$$

来一个个地代替它，则我们就可以作出像上述表达式那样的所有多项式．再把这些多项式相乘，我们就得到积：

$$\prod_{\alpha,\beta,\gamma,\cdots}(C_0^{(\alpha)}+C_1^{(\beta)}\mathrm{e}^k+C_2^{(\gamma)}\mathrm{e}^l+\cdots)\quad\begin{pmatrix}\alpha=1,2,\cdots,N_0\\ \beta=1,2,\cdots,N_1\\ \gamma=1,2,\cdots,N_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\end{pmatrix}$$
$$=C_0+C_k\mathrm{e}^k+C_l\mathrm{e}^l+\cdots$$
$$+C_{k,k}\mathrm{e}^{k+k}+C_{k,l}\mathrm{e}^{k+l}+\cdots$$
$$+\cdots$$
$$+\cdots,$$

其中诸系数 C 是下列量的整数对称函数：

$$\begin{matrix}C_0^{(1)}, & C_0^{(2)}, & \cdots, & C_0^{(N_0)},\\ C_1^{(1)}, & C_1^{(2)}, & \cdots, & C_1^{(N_1)},\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \end{matrix}$$

因而是有理数. 根据前面的证明，这样的表达式不会成为零. 所以，根据 Lindemann 推论，我们得到最一般形式的命题：

数 e 不可能满足如下形状的方程:

$$C_0 + C_1\mathrm{e}^k + C_2\mathrm{e}^l + \cdots = 0,$$

其中指数 $k, l, \cdots$ 和系数 $C_0, C_1, \cdots$ 都是代数数.

这个命题也可叙述如下.

在如下形状的方程中：

$$C_0 + C_1\mathrm{e}^k + C_2\mathrm{e}^l + \cdots = 0,$$

指数和系数不可能全部都是代数数.

5. 我们可以从 Lindemann 推论中导出许多有趣的结论. 首先，π 的超越性是它的直接结果. 考虑下列熟知等式

$$1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = 0.$$

由于这个方程的系数都是代数数，因此指数 iπ 就不是代数数. 所以，π 是超越数.

6. 再考虑函数 $y = \mathrm{e}^x$. 我们知道 $1 = \mathrm{e}^0$. 这似乎与 e 是超越性的定理相矛盾. 然而，情况并非如此. 我们必须注意，指数为零的情形其实已被排除在外了. 当指数为零时，函数 $\psi(x)$ 已失去了它的本性性质，故我们的结论也显然不成立了.

除了特殊情况 $(x = 0, y = 1)$ 外， Lindemann 推论表明，在方程 $y = \mathrm{e}^x$ 或 $x = \log_{\mathrm{e}} y$ 中， y 和 x, 即一个数和它的自然对数，不可能同时为代数数. x 的每个代数值，对应于 y 的一个超越值，反之亦然. 这是一个非常值得注意的性质.

如果我们绘制曲线 $y = \mathrm{e}^x$, 并且标出平面上所有的代数点，即坐标均为代数数的点，则除了一个点 $x = 0, y = 1$ 外，这条曲线不会通过任何其他的代数点. 当 x 和 y 取任何复数值时，定理依然成立. 因此，指数曲线是超越曲线，且其超越性远高于通常假设的情况.

7. Lindemann 推论的进一步结果是函数 $y = \sin^{-1} x$ 及其类似函数的高超越性.

函数 $y = \sin^{-1} x$ 是由下列方程

$$2\mathrm{i}x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}$$

定义的. 所以，我们可以看到，除了 $x=0, y=0$ 外，x 和 y 不可能同时为代数数. 因此，我们可以用几何形式来叙述命题：

如同曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 一样，曲线 $y=\sin^{-1}x$ 除了 $x=0, y=0$ 外不经过平面上任何其他代数点.

第五章

积分仪与 π 的几何作图

1. Lindemann 定理证明了 π 的超越性，从而证明了不仅在古人所说的意义下，而且在更一般的方式下，解决圆的求积这个古老问题是不可能的. 不仅不可能用直尺和圆规将 π 作图表示，而且也不存在由整代数方程定义的高次曲线，使得 π 是对应于横坐标有理值的曲线的纵坐标. 于是，π 的实际作图只能借助于超越曲线来实现. 如果要这样作图，则除直尺和圆规外我们还必须使用一种能连续运动地描绘曲线的“超越”仪器.

2. *积分仪* 就是这样的一种仪器，它是由俄罗斯工程师 Abdank-Abakanowicz 发明和设计的，并由 Zürich 的 Coradi 制造.

当我们已给 *微分曲线*

$$y = f(x)$$

时，这种仪器能使我们绘出 *积分曲线*

$$Y = F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x \, .$$

为此目的，我们移动积分仪的连杆，从而当 *指示点* 按微分曲线移动时，*描绘点* 将画出积分曲线. 关于这种绝妙仪器的更详细描述，可参考原始记录 (德文版： Teubner, 1889; 法文版： Gauthier-Villars, 1889).

我们将简单指出其工作原理．对微分曲线上的任意点 (x,y)，作顶点为 $(x,y),(x,0)$ 和 $(x-1,0)$ 的辅助三角形；该直角三角形的斜边与 X 轴作成一个角，它的正切等于 y.

因此，这条斜边平行于积分曲线在点 (X,Y) 的切线，其中点 (X,Y) 对应于点 (x,y).

这种仪器应当这样构造：当指示点描绘微分曲线时，描绘点应平行于该斜边的不同方向而移动．这可如下实现：连接描绘点与带有锋利边缘的滚筒，其平面是竖直的，且总是平行于该斜边而移动．一个重物把滚筒紧压在纸上，使得其接触点只能在滚筒平面内前进.

积分仪的实际对象是定积分的近似计算，而它在 π 作图上的应用，我们特别感兴趣.

3. 取微分曲线为圆

$$x^2+y^2=r^2;$$

那么积分曲线是

$$Y=\int\sqrt{r^2-x^2}\mathrm{d}x=\frac{r^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{r}+\frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2}\,.$$

该曲线由一系列合同的分支组成．它们与 Y 轴的交点的纵坐标是

$$0,\pm\frac{r^2\pi}{2},\cdots.$$

在直线 $X=\pm r$ 上的交点的纵坐标为

$$r^2\frac{\pi}{4},r^2\frac{3\pi}{4},\cdots.$$

如果我们取 $r=1$，这些交点的纵坐标就可以确定数 π 或它的倍数.

值得注意的是，用这种仪器来描绘曲线，不会使我们觉得厌烦和不精确，相反，觉得方便和精确，特别当我们用钢笔代替铅笔来描图时.

由于我们的曲线只是古人所考虑的割圆曲线的修正，因此，沿着他们所提出的路线，我们得到了圆的求积的实际作图.

注 记

第一部分 —— 第三章

Gauss 多项式. 在 Gauss 时代之前，除了边数为下列形式的正多边形外： $2^n, 2^n\cdot 3, 2^n\cdot 5, 2^n\cdot 15$, 没有人认为用直尺和圆规能作出其他正多边形. 这些早已为古希腊人所知. 但早在 1801 年 [1], Gauss 就证明，只要素数 F_μ 可表为 $2^{2^\mu}+1$ 的形式，就可以用 Euclid 方法作出边数为 F_μ 的正多边形. 于是显而易见，边数不在 Euclid 数列中的正多边形，即 $17, 257, 65\,537, \cdots$ 边的正多边形，都可在同样的限定条件下作图出来. 事实上 Gauss 的讨论还得出了一个结论 [2], 即可用直尺和圆规作图的正多边形，它们的边数 P 只能表成如下形式：

$$2^\alpha\cdot(2^{2^{\alpha_1}}+1)\cdot(2^{2^{\alpha_2}}+1)\cdot(2^{2^{\alpha_3}}+1)\cdot\cdots\cdot(2^{2^{\alpha_s}}+1),$$

其中 $\alpha,\cdots,\alpha_s$ 是互异的正整数，并且每个 $2^{2^{\alpha_i}}+1$ 是素数. 与不能用尺规作图的正多边形个数相比较，这种正多边形的个数是较少的. 正如 Dickson 所指出 [3], 在 100 范围内，数 P 只有 24 个；在 300 范围内有 37 个 (Gauss 均已指明); 在 1000 范围内有 52 个；在 1000000 范围内也

---

[1] *Disquistiones arithmeticœ*, Leipzig, 1801, p. 664; *Werke*, v. 1., 2. Abdruck, 1870, p. 462; French ed. *Recherches Arithmétiques*, Paris, 1807, p. 488; Ger. ed. by Maser, Berlin, 1889, p. 447.

[2] 其实， Gauss 只叙述了这个结论，并没有给出证明.

[3] L.E.Dickson, "On the number of inscriptible regular polygons",*Bull. N. Y. Math. Soc.*, Feb., 1894, v. 3, p. 123.

只有 206 个. Kraitchik 曾经指出[4], 可用尺规作图的正奇数边形只有 30 个. 这些正多边形的边数如下: 5, 15, 17, 51, 85, 255, 257, 771, 1285, 3855, 4369, 13107, 21845, 65535, 65537, 196611, 327685, 983055, 1114129, 3342387, 5570645, 16711935, 16843009, 50529027, 84215045, 252645135, 286331153, 858993459, 1431655765, 4294967295. 它们连同 1 和 3 一起, 正好都是数 $2^{32} - 1 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257 \cdot 65537$ 的因子.

于是, 对于 P 小于一给定整数, 可以作图的正多边形个数取决于 F_μ 是否为素数. 现在只对于 μ 的 18 个值, 已经证明 F_μ 是否为素数. 这些 μ 值包括 0 到 9, 和 11, 12, 15, 18, 23, 36, 38, 73. 这些数中只有前五个数, F_μ 才是素数. 这五种情形已在 17 世纪被 Fermat 指出. 虽然 Eisenstein 曾以问题的形式提出[5]:"形如 $2^{2^\mu} + 1$ 的素数有无限多个", 但似乎是, 对于 $\mu > 4$, F_μ 不是素数.

与此相关的已得结果可列表如下[6]

μ	$F_\mu = 2^{2^\mu} + 1$ 的素因子	发现者	时间
0-4	3, 5, 17, 257, 65537	Fermat	1640
5	$\left\{\begin{array}{l} 2^7 \cdot 5 + 1 = 641 \\ 2^7 \cdot 52347 + 1 = 6700417 \end{array}\right\}$	L. Euler	1732
6	未知但可分	Lucas	1878
	$2^8 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 17 + 1 = 274177$	Landry	1880
	$2^8 \cdot 5 \cdot 52562829149 + 1 = 67280421310721$	Landry 和 Le Lasseur	1880
7	未知但可分	A. E. Western, J. C. Morehead	1905
8	未知但可分	A. E. Western, J. C. Morehead	1909
9	$2^16 \cdot 37 + 1 = 2424833$	A. E. Western	1903
11	$\left\{\begin{array}{l} 2^{13} \cdot 3 \cdot 13 + 1 = 319489 \\ 2^{13} \cdot 7 \cdot 17 + 1 = 974849 \end{array}\right\}$	A, Cunningham	1899
12	$2^{14} \cdot 7 + 1 = 114689$	E. A. Lucas 和 P. Pervouchine	
	$2^{16} \cdot 397 + 1 = 26017793$	A. E. Western	1903
	$2^{16} \cdot 7 \cdot 139 + 1 = 63766529$	A. E. Western	
15	$2^{21} \cdot 579 + 1 = 1214251009$	M. Kraitchik	1925
18	$2^{20} \cdot 13 + 1 = 13631489$	A. E. Western	1903
23	$2^{25} \cdot 5 + 1 = 167772161$	P. Pervouchine	1878
36	$2^{39} \cdot 5 + 1 = 2748779069441$	Seelhoff	1886
38	$2^{41} \cdot 3 + 1 = 6597069766657$	J. Cullen, A. Cunningham, A. E. 和 F. J. Western	1903
73	$2^{75} \cdot 5 + 1 = 188894559314785808547841$	J. C. Morehead	1906

[4]Kraitchik, *Recherches sur la théorie des nombres*, Paris, 1924, p. 270

[5]G. Eisenstein, "Aufgaben", Crelle's *Journal*, v. 27, 1844, p. 87.

[6]除了 Fermat 的那些数, 13 个不同的 μ 值所对应的不同结果的资料: (见下页)

为得到这些结果所作的努力是巨大的；对于不知道数论中同余概念的外行来说，发现这些事实近乎是一个奇迹．这是因为甚至当 $\mu=10$ 时，F_μ 是一个 309 位数，而这一情形至今尚未解决；而当 $\mu=36$ 时，F_μ 是一个高于 20 万亿位的数．关于这种情况，Lucas 曾经指出[7]"写 F_{36} 的纸带可以绕地球一周"．对于 $\mu=73$, Ball 说，F_{73} 的位数"是如此之大，如果将它以这本书 [*Mathematical Recreations*, 第五版，1911, 508 页] 的相同开本和页数印出来，那么需要印的卷数比世界上所有公共图书馆中藏书的总和还更要多"．

---

5. L. Euler, *Commentarii Academice Scientiarium Petrop.*, v. 6(1732—1733), 1738, p. 104; 发表在圣彼得堡科学院，1732 年 9 月 26 日之前．

在他的自传 (Springfield, Mass., 1833, p. 38) 中，美国计算学家 Zera Colburn 回忆说，在他 8 岁公开考试时，他"仅用思维计算"发现 4294967297($=2^{32}+1$) 的因子是 641 和 6700417．参看 F. D. Mitchell, " Mathematical prodigies", *Amer. Journal of Psychology,* v. 18, 1907, p. 65.

6. Lucas, *Comptes Rendus de l' Académie des Sciences,* Paris, v. 85, 1878, p. 138; *Amer. Jour. Math.,* v. 1, 1878, p. 238; *Recreations mathématiques*, v. 2 (2e éd., 1896), p. 234~5. Landry, *Nouv. Corresp. Math.*, v. 6, 1880, p. 417.

7. 独立的发现者： Western, *Proc. Lond. Math. Soc.*, s. 2, v. 3, p. xxi~xxii. 文章摘要显示是 1905 年 4 月 13 日； Morehead, *Bull. Amer. Math. Soc.*, v. 11, p. 543~545, 文章摘要显示是 1905 年 4 月 29 日．

8. Western 和 Morehead, *Bull. Amer. Soc.*, v. 16, 1909, p. 1~6; "每个人做了一半的工作"．

9, 12 (Western), 13, 16. *Proc. Lond. Math. Soc.*, s. 2, v. 1, 1903, p. 175; 文章摘要显示是 1903 年 5 月 14 日．

11. A. Cunningham, *Brit. Assoc. Rept.*, 1899, p. 653~4; 这里所给出的因子是 319489 和 974489. 第二个数是不正确的，4 和 8 被交换了位置．其他形式的正确因子是由 A. Cunningham 和 A. E. Western 在 *Proc. Lond. Math. Soc.*, s.2, v.1, 1903, p. 175 中给出的．这里还指出，$F_\mu<10^6$ 再没有其他的因子，$F_\mu<10^8$ 也无其他因子 (μ 不小于 14).

12, 23. E. Lucas, *Atti Accad. Torino*, v. 13 (1877—1888), p. 271 [1878 年 1 月 27 日]. *Mélanges math. ast. acad. Pétersb.*, v. 5, part 5, 1879, p. 505, 519, 或是 *Bull. Acad. Pétersb.*, s. 3, v. 24, 1878, p. 559; s. 3, v. 25, 1879, p. 63; 对于 $\mu=12$ 和 23 的相关结果，是由 J. Pervouchine 于 1877 年 11 月和 1878 年 1 月发现的．他还指出整数 $2^{2^{23}}+1$ 是 2525223 位数．

15. M. Kraitchik, *Comptes Rendus de l' Académie des Sciences,* Paris, v. 180, p. 800, 1925 年 3 月；以及 *Sphinx-Oedipe*, v. 20, p. 24.

36. P. Seelhoff, *Zeitschrift math. u. Phys.*, v. 31, 1886, p. 174.

73. J. C. Morehead, *Bull. Amer. Soc.*, v. 12, 1906, p. 449~451.

[7] E.Lucas, *Théorie des nombres,* Paris, v.1, 1891, p. 51.

在 1640—1658 年间，Fermat 不止七处[8] 指出 $F_\mu = 2^{2^\mu} + 1$ 表示素数序列；但是在任何地方他都没有证明 F_μ 总是素数.

Gauss 关于他的多项式结果的叙述. 从 Klein 所写的两段话 (参见原书第 2 页和第 14 页) 来看，其含义是，Gauss 证明了，对于边数为 p 的正多边形，如果 p 不是形如 $2^k + 1$ 的素数，那就不能用直尺和圆规将它作图表出：

(1) "Gauss 增加了其他情形 [与 Euclid 相比较], 他证明了当 p 为形如 $p = 2^{2^\mu} + 1$ 的素数时将圆 p 等分的可能性，以及对所有其他数的不可能性."

(2)"Gauss 扩展了这个数列 [Euclid 数列], 他证明对每一个形如 $p = 2^{2^\mu} + 1$ 的素数，将圆 p 等分是可能的，但是对于所有其他素数和它们的乘幂都是不可能的."

然而，以上所蕴涵的结果并不正确，正如 Pierpont 在他的文章中诙谐地写到 "关于 *Disquisitiones Arithmeticae* 中未证明的定理".[9] 也就是说，Gauss 对引号中所指的 "不可能性" 并没有给出证明. 但是在证明了上述 "可能性" 之后，他是这样继续的：

> "除了 2 外，$p-1$ 常常含有其他素因子，从而我们得到的是更高阶的方程[10]; 如果 $p-1$ 含有一个或更多个素因子 3, 则它所对应的是一个或更多个三次方程，如果 $p-1$ 能被 5 整除，则对应的是五次方程，等等. 我们可以严格证明这些方程是不可避免的，也不能取决于更低次的方程；尽管由于本书的限制，我们不能在这里给出证明，但我们仍然认为有必要说

[8] 署期为 1640 年 8 月 [?] 给 Frenicle 的信 (*Oeuvres de Fermat*, v.2.1894, p. 206); 署期为 1640 年 10 月 18 日给 Frenicle 的信 (*Oeuvres*, v. 2, 1894, p. 208); *Varia Opera*, Toulouse, 1679, p. 162; Brassine's *Précis*, Toulouse, 1853, p. 142～3; 署期为 1640 年 12 月 25 日给 Mersenne 的信 (*Oeuvres*, v.2, p. 212～213); "De solutione problematum geometriconum per curvas simplicissimas et unicuique problematum generi proprie convenientes, Dissertatio tripartita" (*Oeuvres de Fermat*, v. 1, 1891, p. 130～131; 法文版，v. 3, 1896, p. 120; *Varia Opera*, 1679[1861 年再版], p. 115); 署期为 1654 年 8 月 29 日给 Pascal 的信 (*Oeuvres de Pascal*, v.4, Paris, 1819, p. 384; *Oeuvres de Fermat*, v. 2, 1894, p. 309～310); 1658 年 6 月 19 日给 Kenelm Digby 的信，由 Digby 转交给 Wallis(*Oeuvres de Fermat*, v. 2, 1894, p. 402, 404～5; 拉丁语的法文版, v.3, 1896, p. 314, 316); 署期为 1659 年 8 月给 Carcavi 的信，其副本在 1659 年 8 月 14 日由 Carcavi 给了 Huygens (*Corresp.* de Huygens no.651; *Oeuvres de Fermat*, v. 2, p. 433～434).

[9] *Bull. Amer. Math. Soc.*, v.2, 1895, p. 77～83.

[10] Gauss 早期讨论内接正 p 边形时，考虑方程 $x^p - 1 = 0$ 及两边除以因子 $x-1$ 后所得到的方程，其中 p 为素数.

明这一事实，使得读者不必再去寻找除我们理论之外其他多边形的作图方法，例如 7, 11, 13, 19 边形，它们可能会徒劳地占用读者的时间.”

Fermat 的定理. 这个定理是 1640 年 10 月 18 号，Fermat 在给 B. Frenicle de Bessy 的信中提到的 (*Oeuvres de Fermat*, v.2, 1894, p. 209). Euler 给出了两种证明 (*Comment. Acad. Petrop.*, v.8, 1736,1741, p. 141 和 *Comment. Nov. Acad. Petrop.*, v.7, 1758, 1759, 1761, p. 49). 其他的证明要归功于 Lagrange(*Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin.* 1771) 和 Gauss(*Disquisitiones Arithmetica*, §49).

第一部分 —— 第四章

正 17 边形的几何作图. 基于纯几何的考虑，Klein 的评注是我们还没有正 17 边形的作图方法 (见原书第 21 页和第 29 页). 这一论断是值得怀疑的，因为已有若干这类的作图被给出了. 其中由 Erchinger 给出的一个方法已被 Gauss 在 1825 年作了报道[11]. 这个作图法如下：

令 D, B, G, A, I, F, C, E 是一条直线上的点，它们由以下作法确定. 令 AB 是一条任意长度的线段. 将其分别向两边延长到 C 和 D 使得

D B G A I F C E

$$AC \times BC = AB \times BD = 4\overline{AB}^2.$$

接着在 CA 两边的延长线上确定点 E, G，使得

$$AE \times EC = AG \times CG = \overline{AB}^2.$$

并且在 BA 的 A 这边的延长线上求点 F，使得

$$AF \times DF = \overline{AB}^2.$$

最后，用 I 分 AE，使得

$$AI \times EI = AB \times AF,$$

[11] *Gottingische gelehrte Anzeigen*, Dec. 19, 1825, no. 203, p. 2025; *Werke*, v.2, p. 186∼187. 在 *Disquisitiones Arithmeticae* 的 Art. 365 中，Gauss 在他的文章中加入了这样的注释："Circulum in 17 partes divisibilem esse geometrice, deteximus 1796 Mart.30". *Cf. Werke* v. 1, p. 476 and v.10_1, 1917, p. 3∼4, 120∼126, 488. 这个结果的发现首先发表在 *Intelligenzblatt of the Allgemeine Literatur-Zeitung*, no.66, 1 June, 1796, col.554.

其中 AI 是 AE 中短的那部分，而 EI 是长的那部分. 然后作一个三角形，其两边都等于 AB, 第三边与等于 AI. 作此三角形的外接圆；则 AI 就是内接正 17 边形的一条边.

Gauss 特别指出，该作者给出了此作图的一个纯综合的证明.

另一个综合的作图与证明的时间与地点为 "Dublin, 1819 年 10 月 17 日", 它由 Samuel James 在 *Transactions of the Irish Academy*[12] 上发表. 而另一个作图法由 John Lowry 于 1819 年在 *The Mathematical Repository* [13] 上给出. 不过最早发表的几何作图是在 Huguenin 的书中："*Mathematische Beiträge zur weiteren Ausbildung angehender Geometer*, Königsberg, 1803, p. 283".

这些几何作图的记录被汇编在 A.Goldenring 的书中："*Die elementargeometrischen Konstruktionen des regelmässigen Siebzehnecks*, Leipzig, 1915". 这个工作的回顾也可参见 *Bull. Amer. Math. Soc*, v.22, 1916, p. 239～246；以及我在 *Amer. Math. Monthly* v.27, 1920, p. 323～326 上发表的注记 "Gauss 和正 17 边形".

正 17 边形能用直尺和圆规作图的发现，不但是 Gauss 一生中极为自豪之处，而且依照 Sartorius von Waltershausen [14] 的说法，也是使 Gauss 一生致力于数学研究的一个原因. Archimedes 在他的墓碑上刻着球内切于圆柱的图形，同样地 Ludolf van Ceulen 刻着关于 π 其后 35 位小数的内容，而 Jacques Bernoulli 刻着关于对数螺线的内容. 那么同样，依 Weber[15] 所说，Gauss 也曾要求将正 17 边形刻在他的墓碑上. 然而他的要求没有被采纳，因为 Gauss 还有很多可以刻上去的东西. 而正 17 边形被刻在 Gauss 出生地 Braunschweig 的他的纪念碑上.

直尺和圆规的一般作图法. 把作图看作可用圆与圆相交、或圆与直线相交，或直线与直线相交来实现，那么可以证明：*每个可用直尺和圆规解答的问题，均只需用圆规解答*. 这个结果首先由 Georg Mohr 在 1672 年 Amsterdam 出版的 *Euclides Danicus* 中证明；这工作在 1928 年被 Danish Society of Sciences 再次刊印. Klein 只提到了 (29 页) 125 年后 Mascheroni 在他的著作 *Geometria del Compasso* 中对此结果的证

[12]V.13(1818), p. 175～187；文章发表于 1820 年 1 月 24 日

[13]N.s., v.4, p. 160. Lowry 的证明在 160～168 页.

[14]*Gauss zum Gedächtniss*, leipzig, 1856, p. 16.

[15]*Encyclopädie der elementaren Algebra und Analysis* bearbeitet von H. Weber. 2. ed. Leipzig, 1906, p. 362.

明. 这个工作有两个法文版 *Géométrie du Compas*, Paris, 分别于 1978 年与 1828 年出版. 其中前者有德文版 *L.Mascheroni's Gebrauch des Zirkels*, Berlin, 1825, 由 J.P.Gruson 编辑. 这个问题的英文论述有： A. Cayley 的论述 *Messenger of Math*, 1885, v.14, p. 179~181； *Collected Papers*, v.12, p. 314~317； E.W.Hobson 在一次主席致词中的论述 *Mathematical Gazette*, v.7, 1913, p. 49~54； H.P.Hudson 的论述 *Ruler & Compasses*, London, 1916, p. 131~143; 以及 J.Coolidge 的论述 *Treatise on the Circle and Sphere*, Oxford, 1916, p. 186~188.

Klein 已指出 (29 页) Poncelet 最先想到了下列结果：给定一个圆和它的圆心，用直尺和圆规得到的问题的每个解，都只需用直尺就能得到. 稍后 Klein 写到 (30 页):"我们将证明只用直尺和一固定的圆，我们如何能解每个二次方程". 这是不可能的，因为 Klein 在 "固定一圆" 之后还必须 "用它的圆心". 只要给定一个圆后，它的圆心也就给定了，这是非常本质的. Hilbert 曾提出以下问题：在一个平面上需要给定多少圆，才能只用直尺来确定其中一个圆的圆心？ 1912 年， D.Cauer[16] 证明了： (a) 如果两个圆没有相交的实点，那么一般不可能只用直尺就能确定其中一个圆的圆心；(b) 如果两个圆在实点相交、或相切、或同心，那么圆心就可以确定了. 几乎同时， J. Grossmann 发现并证明了一个结果：如果在作图平面上有三个线性无关的圆，那么用直尺和圆规能解答的每个问题，只需用直尺就能解答. 此结果的正确证明是由 Schur 和 Mierendorff 给出的.

由此可见，使用直尺和圆规的每个作图都能用直尺及具有固定开口的圆规来实现. 这类作图法在 10 世纪 Bagdad 的 Abû'l Wefâ[17] 就已经找到了. 在这种意义下， 16 世纪 Euclid 的某些问题已被 Cardano、Ferraro 和 Tartaglia 解决了. 1553 年 G. B. Benedetti 在威尼斯发表了一篇小论文， *Resolutio omnium Euclidis problematum, aliorumque ad hoc necessario inventorum, una tantumodo circuli data apertura.* 这篇论文的英文版由 Joseph Moxon[18] 从荷兰文翻译成一本珍稀的小册子，并且 J. S.

[16]Mathematische Annalen , v.7, 1912, p. 90~94； v.74, 1913, p. 462~464.

[17]"Woepcke Analyse et extrait d'un recueil de constructions géométriques par Aboûl Wafâ", Journal Asiatique, 1855.

[18]*Compendium Euclidis Curiosi: or, geometrical operations. Showing how with a single opening of the Compasses and a straight ruler all the propositions of Euclid's first five books are performed.* London, 1677. Moxon 未告诉我们荷兰文版的作者.

Mackay[19] 将它写成了论文.

可用直尺和圆规解答的每个问题也能用一把有两条边的直尺来解答，无论这两条边是平行或是相交于一点. 与此相关的某些文献可参考以下资料： *Nouvelle Corresp.Math.*, v.3, 1877, p. 204～208; v.5, 1879, p. 439～442; v.6, 1880, p. 34～35; Akademie der Wissen.,Vienna, *Sitzungsberichte*, Abt.IIa, v.99, 1890, p. 854～858; *Bolletino di Matematiche e di Scienze fisiche e naturali*, v.2, 1900～01, p. 129～145, 225～237.

第二部分 —— 第二章

π 的无理性. Klein 写到 (52 页):" 自 1770 年后，评论的严格性渐渐开始恢复了它的公正地位. 今年 Lambert 发表了著作： *Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur ··· des Cirkuls suchen.* 在其他材料中讨论了 π 的无理性. 1794 年 Legendre 在著作 *Éléments de Géométrie* 中总结性地证明了 π 和 π^2 是无理数. " 这段话的含义就是 Lambert 最终并没有讨论 π 的无理性而 Legendre 讨论了. 以下说明这两个观点是如何地本质上错误. Klein 只是在简单地重复 Rudio 的错误说法[20]；但经过 Pringsheim 在 1898 年的仔细研究[21] 后， Lambert 的证明就作为 "ausserordentlich scharfsinnig und im wesentlichen vollkommen einwandfrei" 出现，而 Legendre 的证明保留在 "in Bezug auf Strenge hinter Lambert weit zurück" 中.

正如后面 π 的超越性证明那样，当它的无理性成为问题时， e 的讨论是基本的. 1737 年 Euler[22] 基本上证明了 e 和 e^2 的无理性，并且他给出了 e 的连分式表达式，而 Lambert 关于 e^x,tan x 和 π 的无理性证

---

[19] "Solutions of Euclid's problems, with a ruler and one fixed aperture of the compasses, by the Italian geometers of the sixteenth century ", *Proc. Edinb. Math. Soc.*, v.5, 1887, p. 2～22.

[20] F. Rudio: *Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre, vier Abhandlungen über die Kreismessung.* Leipzig, 1892, p. 56. B. Calò 在 Enriques's *Fragen der Elementargeometric*, II. Teil, 1907, p. 315 中重复这个错误; D. E. Smith 在 Young's *Monographs on Topics of Modern Mathematics*, 1911, p. 401 中也重复这个错误. 而 T. Vahlen 在 *Konstruktionen und Approximationen*, Leipzig, 1911, p. 319 中更正了这个错误.

[21] A. Pringsheim:" Über die ersten Beweise der Irrationalität von e und π", Bayerische Akad. der Wissen., *Sitzungsberichte*, mathem.-phys. Cl., v.28, 1899, p. 325～337.

[22] "De fractionibus continuis", *Comment. acd. de Petrop*, v.9, 1744, p. 108. Presented to St. Petersburg Academy, March. 1737.

明正依赖于这个连分式. 从 Euler 的展开式开始[23]

$$\frac{e-1}{2}=\frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\frac{1}{10+}\frac{1}{14+}\frac{1}{18+}\cdots,$$

Lambert 找到了

$$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{1}{2/x+}\frac{1}{6/x+}\frac{1}{10/x+}\frac{1}{14/x+}\cdots,$$

且由于

$$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{e^{x/2}-e^{-x/2}}{e^{x/2}+e^{-x/2}}=\tanh\frac{x}{2}=\frac{1}{i}\tan\frac{ix}{2}, \text{如果 } z=\frac{ix}{2},$$

$$\tan z=\frac{1}{1/z-}\frac{1}{3/z-}\frac{1}{5/z-}\frac{1}{7/z-}\frac{1}{9/z-}\cdots.$$

他才证明了定理:

1. *如果 x 是非零的有理数, 那么 e^x 不可能为有理的.*

当 $x=1$ 时, 作为特殊情况, 我们得 e 是无理数.

2. *如果 z 是非零的有理数, 那么$\tan z$不可能为有理的.*

当 $z=\pi/4$ 时, $\tan\pi/4=1$, 因此作为特殊情况, π 是无理数.

在 Lambert 的 *Vorläufige Kenntnisse* 中, Klein 所参照的那部分包含了一些未加证明和没有解析展开的公式, 并且还打算作为处理这课题的一个通俗概论. 对此必须参考科学而不平常的 "*Mémoire*"[24], 1767. 在 "mit minutiöser Genauigkeit" 那里, Lambert 证明了作为连分式的 $\tan z$ 的表达式的收敛性. Pringsheim 详述了在数学思想史上这一时期的这些考虑的 "令人惊骇的" 性质. 对于这种考虑, Legendre 是无辜的, 正如伟大的 Gauss 在 1812 年关于超几何级数的文集也是无辜的一样, 如此等等, 直到以后很长一段时期.

"这样, Lambert 文集包含了在很多年内都是的 *第一*, 并且作为收敛连分式, 它是我们现在看来函数被真正严格发展的 *仅有* 例子, 特别是上面给出的 $\tan z$."

圆周的测量. 通过考察直到边数为 96 的内接和外切多边形, Archimedes 得到了这样的结果: 圆的周长与它的直径之比小于 $3\frac{10}{70}$ 但大于 $3\frac{10}{71}$. 下面的表格给出了具单位直径的圆中内接和外切正多边形的周长 (Chauvenet, *Treatise on Elementary Geometry*, Philadelphia, 1870, p. 161).

[23]L. Euler: *Introductio in analysin infinitorum.* Tomus Primus, Lausannae, 1748, p. 319. 此工作在 1745 年结束; *Cf.* G.Eneström, *Verzeichnis* etc., Erste Lieferung, p. 25.

[24]"Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques".Lu en 1767. Printed in 1768 in *Hist.de l'acad.royale des sciences et belles-lettres*, Berlin, Année 1761(1), p. 265~322.

边数	外切多边形的周长	内接多边形的周长
4	4.0000000	2.8284271
8	3.3137085	3.0614675
16	3.1825979	3.1214452
32	3.1517249	3.1365485
64	3.1441184	3.1403312
128	3.1422236	3.1412773
256	3.1417504	3.1415138
512	3.1416321	3.1415729
1024	3.1416025	3.1415877
2048	3.1415951	3.1415914
4096	3.1415933	3.1415923
8192	3.1415928	3.1415926

值得注意的是 π 的近似值 355/113 直到小数点后六位都是对的. 这个结果首先是由中国人祖冲之 (5 世纪) 给出的, 后来也被 Valentin Otho(16 世纪) 和 Adriaen Anthonisz(17 世纪) 得到. 基于 $335/113 = 3 + 4^2/(7^2 + 8^2)$, Grunert 给出了 π 的几何作图法, *Archiv der Mathematik und Physik*, v.12, 1849, p. 98.

Ramanujan 在下面的文献中给出了另一个作图法: *Journ. Indian Math. Soc.* v.5, 1913, p. 132(或 *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan*, Cambridge, 1927, p. 22, 35).

Euler 公式. Euler 首先给出了公式:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x.$$

第一次是在 *Miscellanea Berolinensia*, v.7, 1743, p. 179 (文章发表于 1742 年 9 月 6 日), 第二次是在他的 *Introductio in Analysin*, Lausanne, 1748, v. 1, p. 104. 他还给出了

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x.$$

其等价形式

$$ix = -\log(\cos x - i\sin x)$$

被 Roger Cotes 在更早的时候给出 (*Philosophical Transactions*, 1714, v.29, 1717, p. 32), 他写到: "Si quadrantis circuli quilibet arcus, radio CE descriptus, sinum habeat CX, sinumque complementi ad quadrantem XE: sumendo radium CE, pro Modulo, arcus erit rationis inter $EX + XC\sqrt{-1}$ & CE mensura ducta in$\sqrt{-1}$." 也可参见 Cotes, *Harmonia Mensurarum*, 1722, p. 28.

第二部分 —— 第四章

在 54 页到 66 页的讨论中，假定了存在无限多的素数. 这个事实的一个最简洁证明是由 Euclid(大约公元前 300 年) 在他的《几何原本》的第 9 部中的命题 20 给出的.

在 68 页上，考虑关系 $y = e^x$ 时，Klein 稍稍有点错误，他写到："x 的每个代数值，对应于 y 的一个超越值，反之亦然." 这里 "反之" 的意思应是：y 的一个超越值对应于 x 的某个代数值. 但没有给出证明；事实上，一般来说，这是不对的. 要更正的话，应把 "反之亦然" 去掉，加上："y 的每个代数值，对应于 x 的一个超越值."

本书是著名数学家 F.Klein 1894 年在德国哥廷根的一个讲稿，主要讨论了初等几何的三大著名难题——倍立方、三等分角、圆的求积。当年作者用简明易懂的方式讲解这个课题，引起听众极好的反响。后由德国数学家帮助整理出版，1930 年又翻译成英文，一直流传至今。

本书内容虽是100多年前的东西，但大师所讲解的方法至今仍让人感到十分漂亮、简洁，对做现代数学很有参考价值。几何三大难题在我国至今还有人在盲目研究，因此新高中教学标准已加入有关内容。

本书对于学数学的大学生、中学教师乃至中学生都有很好的阅读价值，也可供广大高校教师和科技人员参考。

